

Chapitre 4 : Application aux fonction élémentaires (fonctions usuelles)

4-1 La fonction puissance

4-1-1 Définition : Pour tout réel strictement positif a , on appelle fonction exponentielle de base a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ ($\ln$: logarithme népérien).

Remarque :

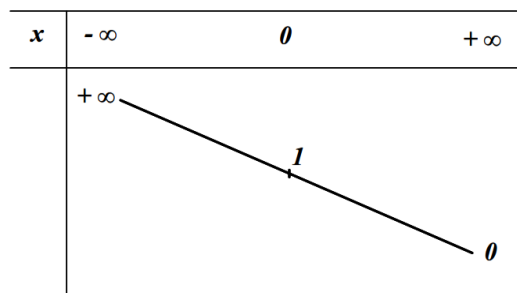
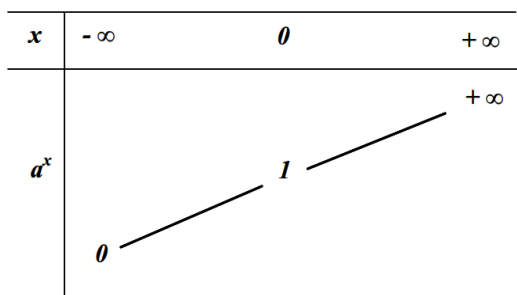
- La fonction exponentielle est la fonction exponentielle de base e . Si $a = 1$ on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = 1$.

4-1-2 Propriétés algébriques

Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour tous réels x et y on a :
 $x^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

4-1-3 Les tableaux de variations

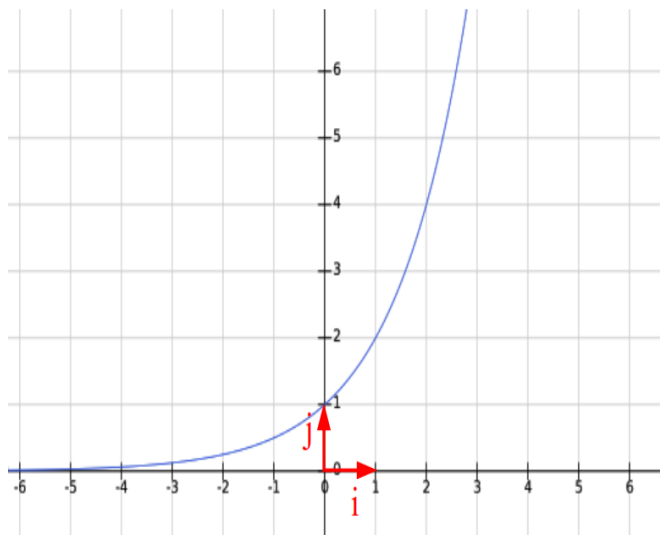
$$a^0 = 1.$$



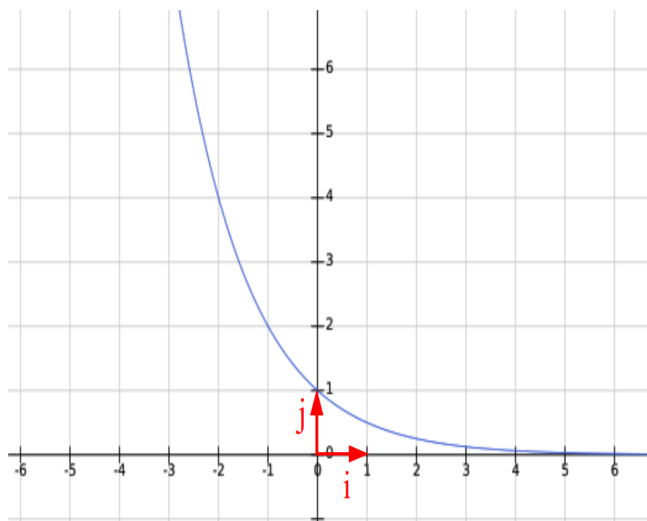
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$$

4-1-4 Représentation graphique

$$a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$$



$$0 < a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$$



Remarque : Les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto (\frac{1}{a})^x$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$

4-2 Les fonctions exponentielles

4-2-1 Définition : La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x)$
L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est notée e^x .

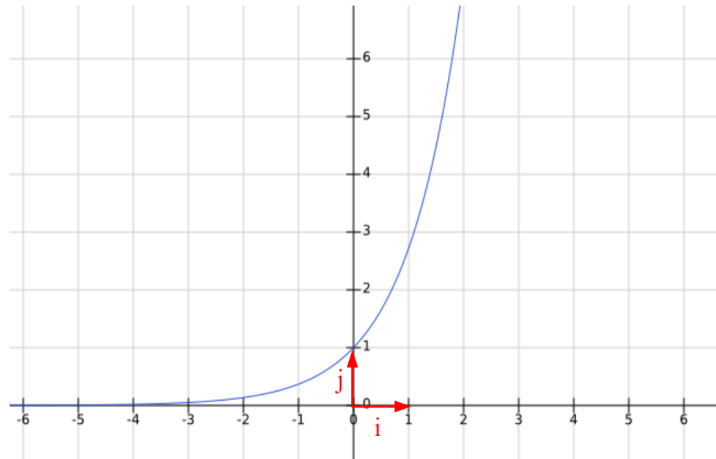
4-2-2 Propriétés algébriques

- 1) $e^0 = 1, e = 2.71828$
- 2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- 4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{xy} = (e^x)^y$

4-2-3 Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x			
			$+\infty$
		1	
	0		

4-2-4 Représentation graphique



On d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc la courbe représentative admet une branche parabolique dans la direction $\vec{j}$.

4-3 Fonction logarithme népérien

4-3-1 Définition : la fonction logarithme népérien notée $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, la fonction $\ln$ est donc l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(y = \ln x, x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow (x = e^y, y \in \mathbb{R})$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

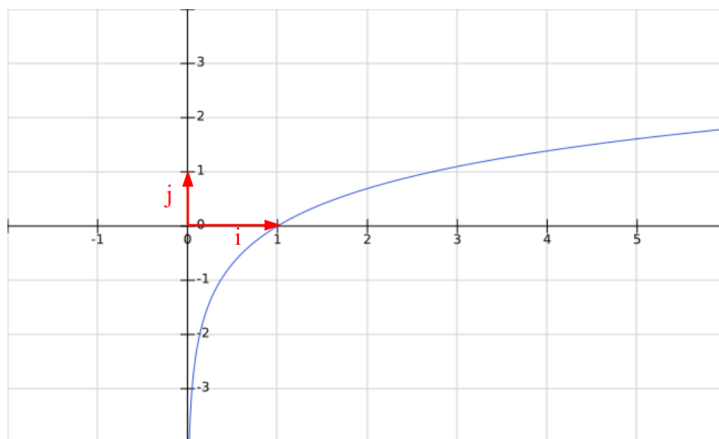
4-3-2 Propriétés algébriques

- 1) $\ln 1 = 0, \ln e = 1$;
- 2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln xy = \ln x + \ln y$;
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$;
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \ln x^\alpha = \alpha \ln x$;
- 5) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

4-3-3 Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

4-3-4 Représentation graphique



On a d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc la courbe représentative admet une branche parabolique dans la direction $\vec{i}$.

4-4 Fonctions hyperboliques

4-4-1 Définitions :

Les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ; thx = \frac{shx}{chx}$$

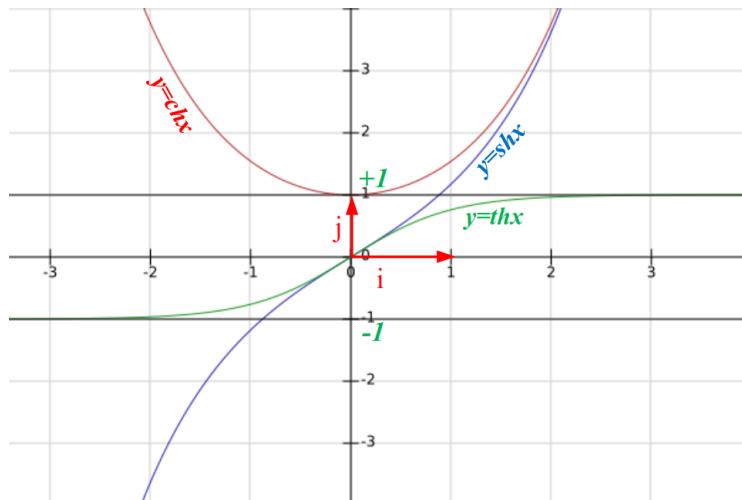
Remarque :

Les fonctions sh et th sont des fonctions impaires, la fonction ch est paire.

4-4-2 Tableau de variation

x	0	$+\infty$
shx	0	$+\infty$
chx	1	$+\infty$
thx	0	1

4-4-3 Représentation graphique



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{shx}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{chx}{x} = +\infty$$

4-4-4 Propriétés algébriques

$\forall x, y$ des réels on a :

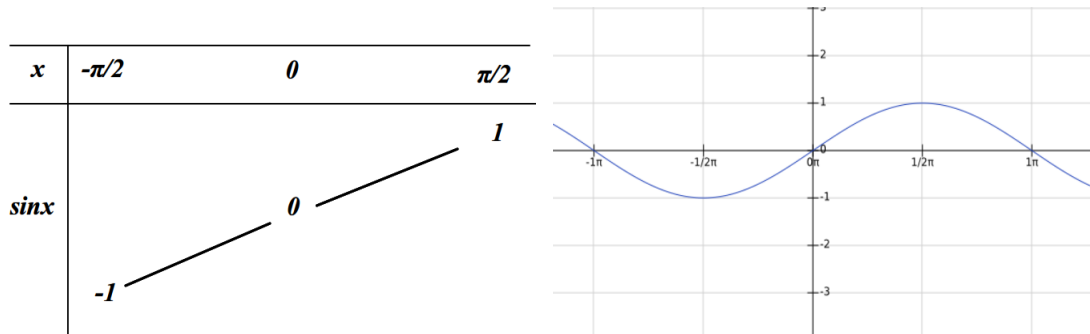
- 1) $shx + chx = e^x$, $ch^2x - sh^2x = 1$, $thx = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$;
- 2) $sh(x+y) = shx.chy + shy.chx$
- 3) $ch(x+y) = chx.chy + shx.shy$
- 4) $sh2x = 2shx.chx = \frac{2thx}{1-th^2x}$, $ch(2x) = 2ch^2x - 1$
- 5) $th2x = \frac{2thx}{1+th^2x}$
- 6) Dérivées : $sh'x = chx$; $ch'x = shx$; $th'x = 1 - th^2x$

4-5 Les fonctions trigonométriques

4-5-1 La fonction sinus, la fonction cosinus :

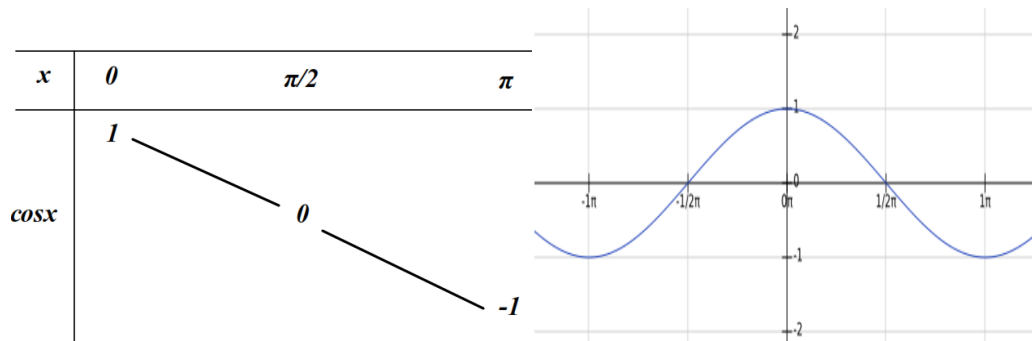
La fonction $f(x) = \sin x$ est une fonction impaire définie de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. $f'(x) = \cos x$. $f(0) = 0$, $f(x)$ est croissante.

- Tableau de variation et représentation graphique



La fonction $\cos x$ est une fonction paire sa dérivée est $-\sin x$, elle est décroissante.

- Tableau de variation et représentation graphique



4-5-2 Les propriétés algébriques

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \alpha : \text{angle}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

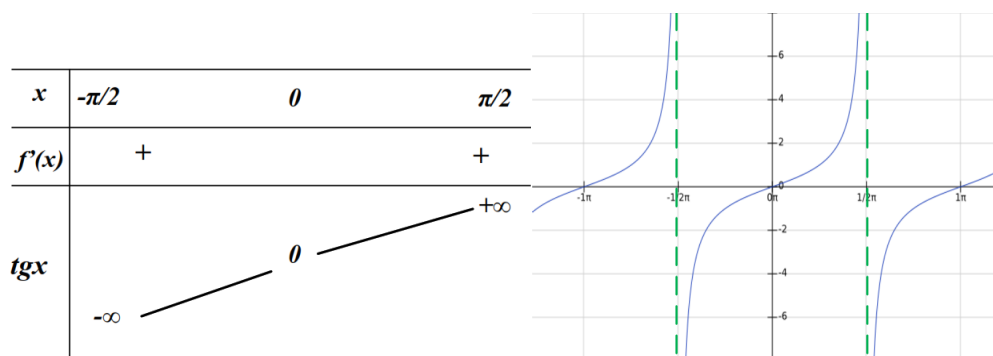
4-5-3 La fonction tangente et la fonction cotangente

La fonction tangente $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ est une fonction impaire définie

de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-\infty, +\infty]$, sa dérivée $(tgx)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$.

La dérivée est positive > 0 , elle est continue et croissante.

• Tableau de variation et représentation graphique

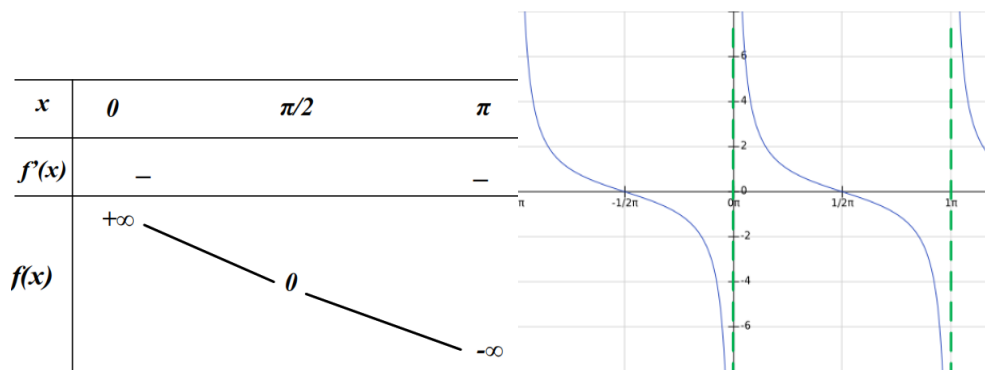


La fonction cotangente $\cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$ une fonction continue et décroissante sur Df

$$\cot gx :]0, \pi[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$(\cot gx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0 \quad \forall x \in Df$$

• Tableau de variation et représentation graphique



4-6 Les fonction réciproques

4-6-1 Définitions

1) Soit f une fonction définie de I dans J la fonction f admet une réciproque f^{-1} si et seulement si elle était continue en tout point de I et monotone (strictement croissante, ou décroissante) en d'autre terme si f est une bijection de I dans J alors elle admet une fonction réciproque notée f^{-1} .

2) La dérivée de la fonction réciproque

soit f une bijection qui va de I dans J $f : I \rightarrow J$ $x_0 \in I$ et $f(x_0) = y_0 \in J$
On suppose que f est dérivable au point x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ et f^{-1} continue en y_0 cependant :

$$f^{-1} \text{ dérivable en } y_0 ; \text{ alors : } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$$

4-6-2 les fonction réciproque des fonctions hyperboliques

1) la fonction réciproque de shx

la réciproque de la fonction sinus hyperbolique est notée argument sinus hyperbolique : $shx : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on sait que $f(x) = shx$ est (continue et monotone) bijective et $f^{-1} \exists$.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \arg shx \quad x \in \mathbb{R} \quad y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy.$$

$$sh(\arg shx) = shy \Leftrightarrow x = shy$$

- La fonction $\arg shx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow (\arg shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $(\arg shf(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$

2) La fonction réciproque de chx

La fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$ définie par $g(x) = chx$ bijective (continue et strictement croissante), donc g^{-1} existe et la réciproque est la fonction argument cosinus hyperbolique notée par $\arg chx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$y = \arg chx \Leftrightarrow x = chy. \quad chx : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$$

$$\arg chx : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$(\arg chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\arg chf(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$$

3) La réciproque de thx

$$thx = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \text{ définie } \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$thx : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} thx = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} thx = +1 \quad (thx)' = 1 - th^2x$$

$$\text{la réciproque est } \arg thx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \arg thx :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\arg thx)' = \frac{1}{1-x^2} \quad -1 < x < 1$$

$$(\arg chf(x))' = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)} \quad |x| < 1$$

4) La réciproque de la fonction $\coth x$

$$\begin{aligned} \arg \coth x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \\ \coth x : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \text{la r\'eciproque de } \coth x &\text{ est not\'ee } \arg \coth x. \\ \arg \coth x :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^* \\ \arg \coth x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \\ (\arg \coth x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad |x| > 1 \\ (\arg \coth f(x))' &= \frac{f'(x)}{1-f^2(x)} \end{aligned}$$

4-6-3 Les r\'eciproques des fonctions trigonom\'etrique

1) La r\'eciproque de la fonction sinus

$$\begin{aligned} \sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] \\ \arcsin x : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin \arcsin x &= x. \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arcsin f(x))' &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[\\ \text{fonction impaire.} \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \arcsin 0 &= 0 \text{ ou } \pi \\ \arcsin -1 &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2) La r\'eciproque de la fonction cosinus

$$\begin{aligned} \arccos x : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ \cos x : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ \cos \arccos x &= x. \\ (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[\\ (\arcsin f(x))' &= \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} \\ \text{fonction paire.} \end{aligned}$$

3) La r\'eciproque de la fonction tangente

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{arctg} x : \mathbb{R} &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x. \\ (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (\operatorname{arctg} f(x))' &= \frac{f'(x)}{f(x)^2+1} \\ \operatorname{arctg} &\text{ s'annule en } 0 \end{aligned}$$

4) La r\'eciproque de la fonction cotangente

$$\begin{aligned} \cot gx &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad \cot gx :]0, \pi[\rightarrow]-\infty, +\infty[\\ \cot gx : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ (\cot gx)' &= \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \pi \quad \operatorname{arccotg} x \text{ s'annule en } \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arccot} gx :] - \infty, +\infty[\rightarrow] 0, \pi[\\
&(\operatorname{arccot} gx)' = \frac{-1}{1+x^2} \\
&(\operatorname{arccot} gf(x))' = \frac{-f'(x)}{1+f(x)^2} \\
&(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}
\end{aligned}$$