Chapitre III Cinématique du point

III.1.Introduction.

La cinématique étudie le mouvement des corps en fonction du temps indépendamment des causes (forces appliquées) produisant ce mouvement.

III.1.1.Repère.

Pour repérer la position d'une particule (ou un point matériel), il est nécessaire de définir un repère d'espace :

- Une origine O et une base ($\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$), le trièdre ($O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) est le repère d'espace.

III.1.2.Référentiel.

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (Repère +horloge).Un référentiel est donc un objet par rapport auquel on étudie le mouvement. (Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé).

III.1.3.Grandeurs physiques de la cinématique.

Les grandeurs physiques de la cinématique sont :

$-Le\ temps$

$-La\ position$

$-La\ vitesse$

$-L'accélération$

Etudier le mouvement d'un point matériel revient à :

1) Trouver l'équation de la trajectoire du mobile
2) Trouver la relation mathématique (Equation) entre la vitesse et le temps. Connaissant cette relation, on peut calculer la vitesse du mobile à n'importe quel instant, ou bien l'instant correspondant à n'importe quelle vitesse.
3) Trouver la relation entre la position et le temps.
4) Trouver la relation entre la vitesse et la position.

III.1.4.Trajectoire.

La trajectoire d'un point M (ou mobile) dans un repère donné (référentiel) est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce référentiel (Figure 1). La forme de la trajectoire dépend du référentiel choisi.

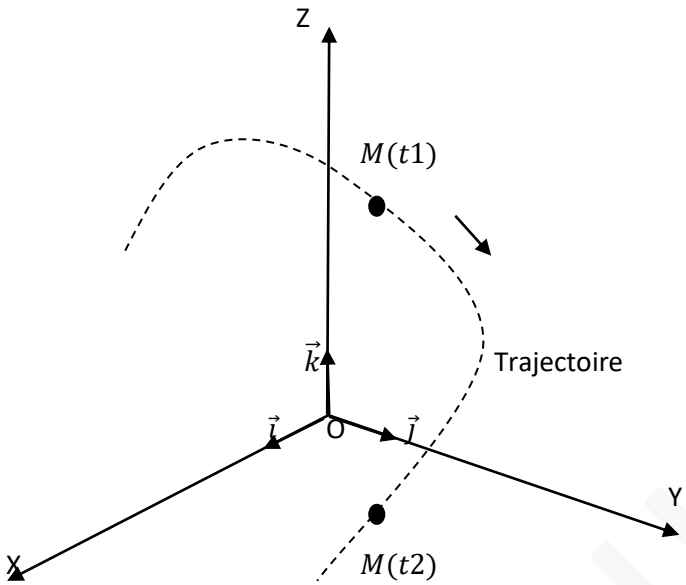


Figure.1

III.1.5. Position d'un mobile dans l'espace.

III.1.5.1. Vecteur position et coordonnées cartésiennes.

M mobile, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ $repére\ choisi$.Figure 2.

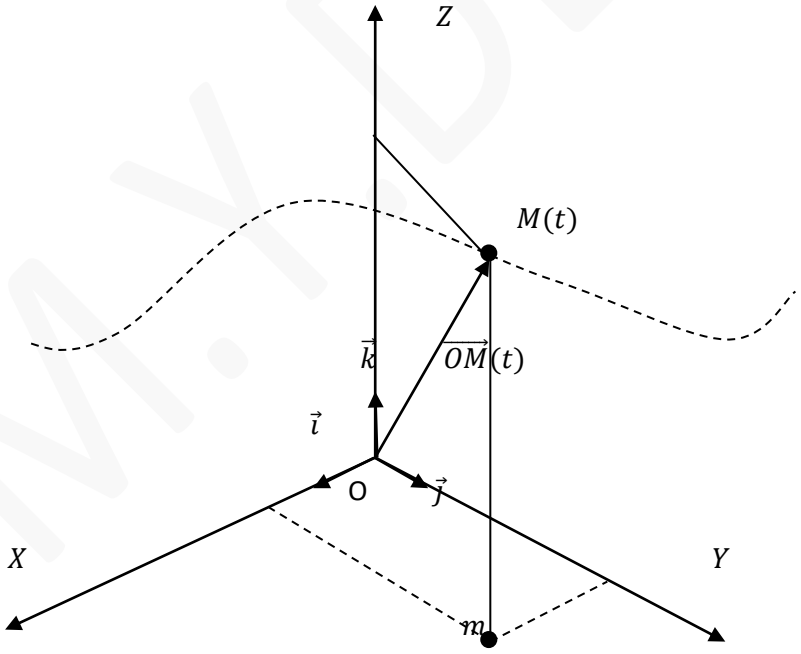


Figure.2

$\overrightarrow{Om}$ est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur le plan XOY.

La position de M est repérée à chaque instant par le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Mathématiquement : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

M.YOEBILI

Si le repère est orthonormé, $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ sont appelés les coordonnées cartésiennes du point mobile M. S'il y'a mouvement, donc $\mathrm{x} = \mathrm{x(t)}$, $\mathrm{y} = \mathrm{y(t)}$ et $z = z(t)$ (x, y et z varient dans le temps).

$\mathrm{x} = \mathrm{x(t)}$, $\mathrm{y} = \mathrm{y(t)}$ et $\mathrm{z} = \mathrm{z(t)}$ sont appelées les équations horaires du mouvement. Le mouvement du mobile M est parfaitement connu si on connait ces équations horaires.

III.1.5.2.Détermination de l'équation de la trajectoire.

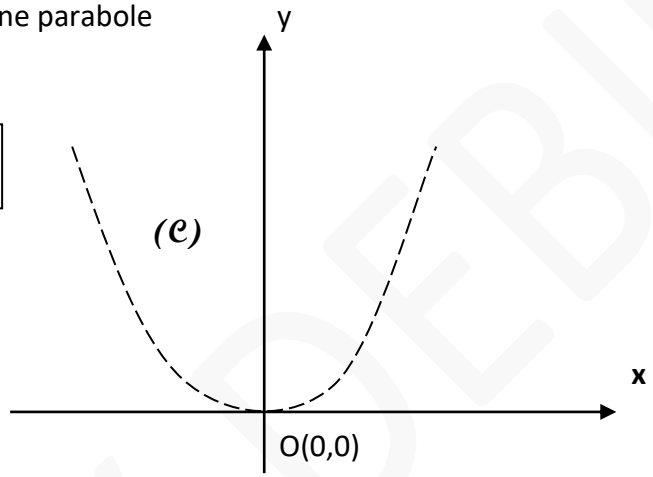
Le mouvement d'un mobile est parfaitement connu, si on connait les équations horaires.

Exemple : Sachant que $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ et $z = 0$, déterminer la position du point M pour tout instant t.

La première étape consiste à éliminer t entre x et y, ce qui donne $y\,(x) = x^2$

C'est l'équation d'une parabole

$y\,(x) = x^2$



III.1.6.Vitesse d'un mobile.

La rapidité avec laquelle un mobile change de position est indiquée par sa vitesse.

III.1.6.1.Vitesse moyenne.

Soit M un point matériel décrivant une trajectoire (C) dans un référentiel $\mathcal{R}$. Figure 3.

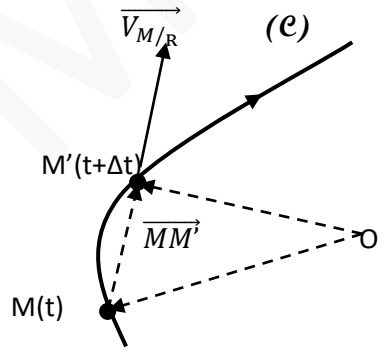


Figure 3.

$\overrightarrow{V_{M/\mathrm{R}}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}}{t'-t}$

$\overrightarrow{V_{M/\mathrm{R}}} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \vec{V}moy$

Le vecteur vitesse moyen est donc un vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{MM'}$ si $t' > t$.

III.1.6.2.Vitesse instantanée.

Le vecteur vitesse instantanée de M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ à un instant t est obtenu en prenant la limite $\Delta t \to 0$ dans la définition de $\vec{V}moy$. C'est-à-dire les points M et M' sont infiniment proches.

$\overrightarrow{V_{M/\mathrm{R}}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{\mathrm{R}} = \vec{V}inst$

III.1.6.2.1.Propriétés du vecteur vitesse instantanée.

- Son origine est la position de M à l'instant (t).Figure 4.
- Sa direction est tangente à la trajectoire à la position considérée.
- Son sens est donné par le sens de parcours de la trajectoire.
- So module est $\frac{dS}{dt}$ où $\overline{dS}$ est le déplacement curviligne élémentaire.

Donc $\overrightarrow{V_{M/\mathrm{R}}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{\mathrm{R}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}$

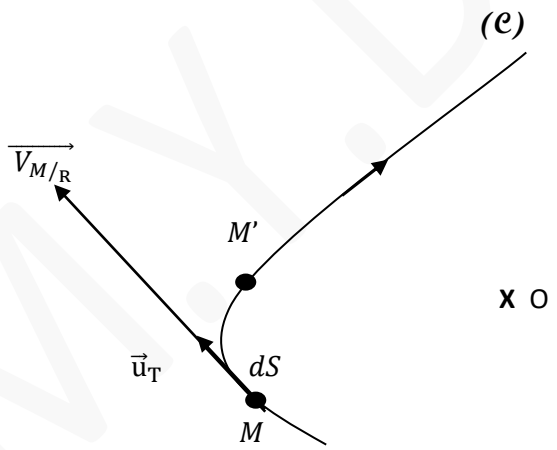


Figure 4.

$\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que le sens du mouvement.

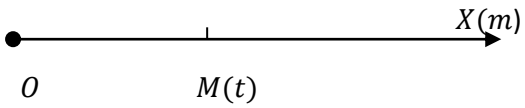
III.1.7. Vecteur accélération.

$$\overrightarrow{\gamma_{M/\mathrm{R}}} = \frac{d\overrightarrow{V_{M/\mathrm{R}}}}{dt}_{\mathrm{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}_{R}$$

III.1.8.Types de mouvements.

III.1.8.1 Mouvement rectiligne (Mouvement à 1D).

III.1.8.1.1.Repérage du mobile.



$$x(t) = \overline{OM}(t)$$

Le mobile est repéré par une coordonnée cartésienne x(t).

Choix : Origine, Sens, Unité de mesure de longueur.

III.1.8.1.2.Vitesse moyenne

$vm(t1, t2) = \frac{X2-X1}{t2-t1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

x_1 et x_2 sont les coordonnées des points $M1\ et\ M2$.

III.1.8.1.3.Vitesse instantanée.

$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}$

$V(t)$, c'est la dérivée de la coordonnée spatiale x à l'instant considéré.

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant t, à partir de sa vitesse instantanée, on calcule l'intégrale :

$x(t) = x(t_0) + \int_{t0}^{t} V(t')dt'$

Ceci implique la connaissance de la position du mobile à un instant donnét_0, soit : $x(t_0)$

III.1.8.1.4.Accélération instantanée.

$a(t) = = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}$

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant t, à partir de son accélération instantanée, on calcule l'intégrale :

M.Y.DEBILI

$v(t) = v(t_0) + \int_{t0}^{t} a(t')dt'$

Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile à un instant donné $t0$, soit : $v(t_0 n)$

III.1.8.2.Deux cas particuliers de mouvements rectilignes :

MRU (Mouvement rectiligne uniforme) et MRUV (Mouvement rectiligne uniformément varié).

III.1.8.2.1.MRU (Mouvement rectiligne uniforme).

L e mouvement rectiligne uniforme est un mouvement rectiligne à vitesse constante.

$v(t) = v_0$ $(Figure\ 5b)$.

Par conséquent,

$a = \frac{dv_0}{dt} = 0$ $(Figure\ 5a)$.

$\frac{dx(t)}{dt} = v_0, en\ integrant\ on$ a : $x(t) = x(t_0) + \int_{t0}^{t} v_0 dt'$ donc, $\boxed{\boldsymbol{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)}}$ (MRU) $(Figure\ 5c)$.

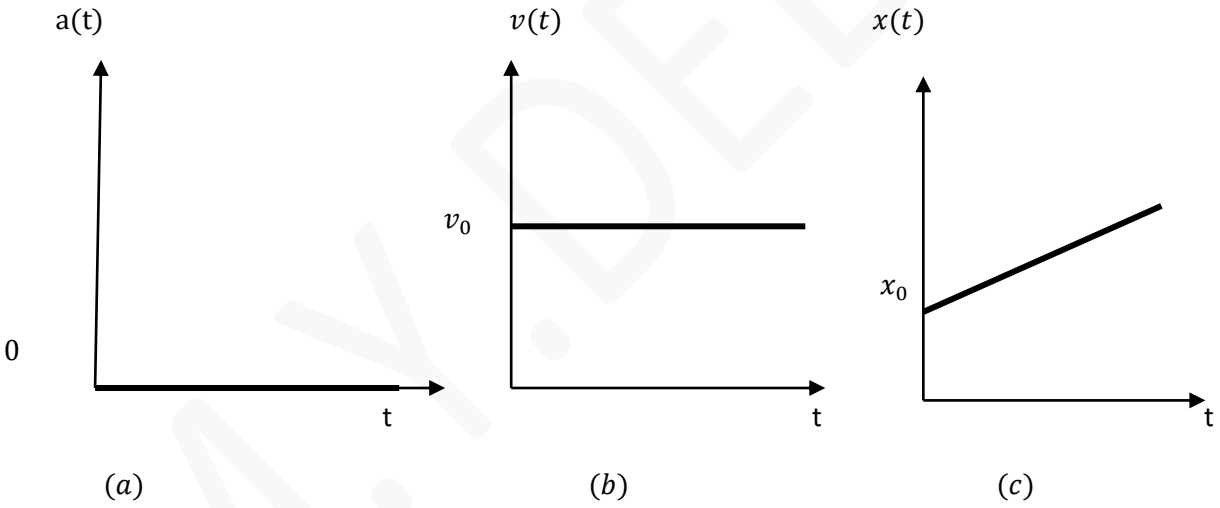


Figure 5.

III.1.8.2.2.MRUV (Mouvement rectiligne uniformément varié).

Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

C'est un mouvement rectiligne avec une accélération constante $a = a_0$.

Par conséquent,

- $\frac{dv}{dt} = a_0$ (Figure 6a) , en intégrant : $v(t) = v_0 + \int_{t0}^{t} a_0 dt'$

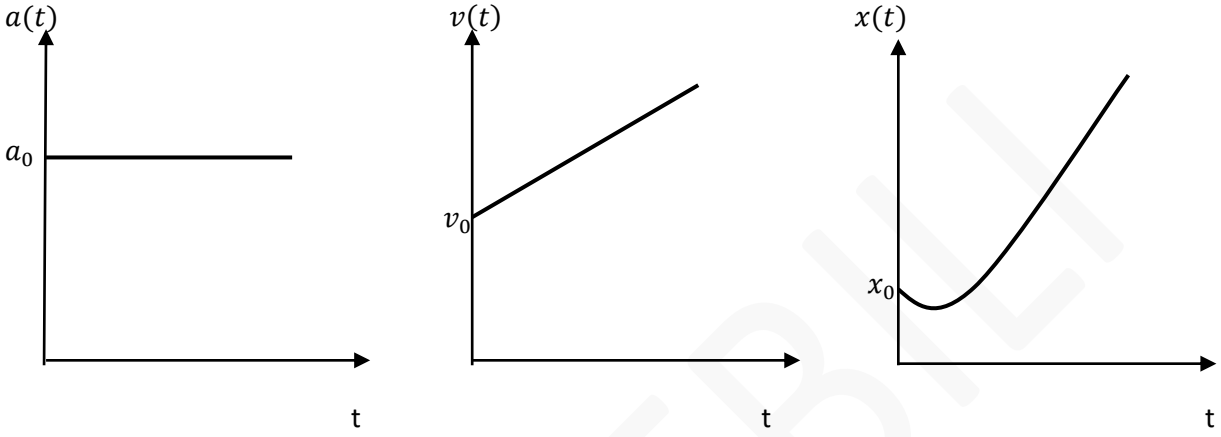
$\boxed{\boldsymbol{v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)}}$ Figure 6b (1)

- $\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0(\mathrm{t} - t_0)$, en integrant:

$x(t) = x_0 + \int_{t0}^{t}[v_0 + a_0(\mathrm{t} - t_0)]dt'$

$$\boldsymbol{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2} \qquad (2)$$

$x(t) st\ une\ fonction\ du\ second\ degré\ (Parabole\ ) Figure\ 6c.$



(a) (b) (c)

Figure 6

En éliminant t entre les relations (1) et (2), on trouve la relation entre la variation de vitesse et le déplacement.

(1) donne : $(\mathrm{t} - t_0) = \frac{v - v_0}{a_0}$

(2) donne : $x - x_0 = v_0.\frac{v - v_0}{a_0} + \frac{1}{2}a_0\frac{(v - v_0)^2}{{a_0}^2}$

$$x - x_0 = (v - v_0)(\frac{v_0}{a_0} + \frac{v - v_0}{2a_0}) = = (v - v_0)(\frac{v_0}{a_0} + \frac{v}{2a_0} - \frac{v_0}{2a_0}) = = (v - v_0)(\frac{v}{2a_0} + \frac{v_0}{2a_0}) = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a_0}$$

$$x - x_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a_0}$$

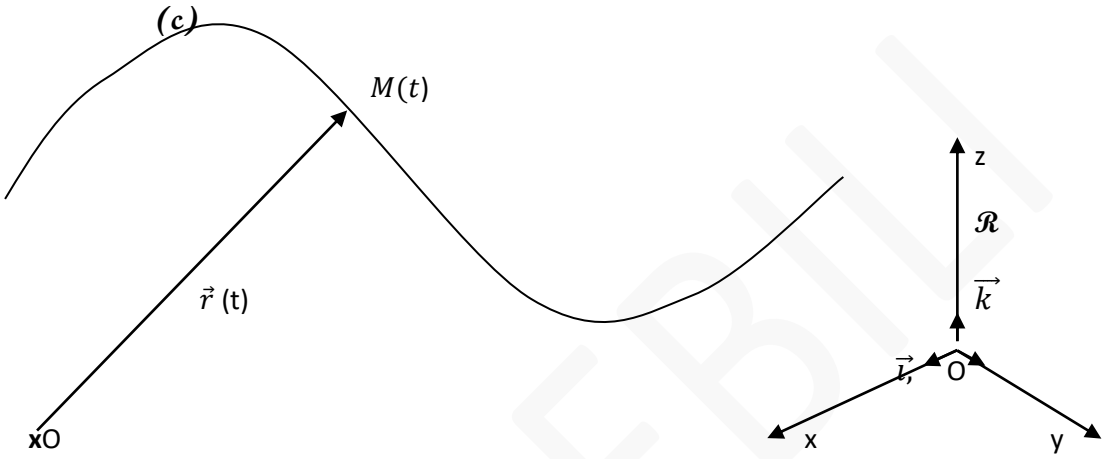
Ou bien : $\boldsymbol{v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)}$ (3) (Loi des vitesses)

III.1.8.3.Mouvement à plusieurs dimensions.

III.1.8.3.1.Trajectoire quelconque.

-Choix d'une origine O

-Choix d'un référentiel $\mathcal{R}\,(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.



$\vec{r}$ (t) = $\overrightarrow{OM}\,(t)$ $ou\ bien$ $\overrightarrow{r\,(t)} = \overrightarrow{OM}\,(t)$

$\vec{r}$(t) (x,y,z), $x = OMx$, $y = OMy$, $z = OMz$ $(projection\ de\ M\ sur\ Ox, Oy\ et\ Oz)$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

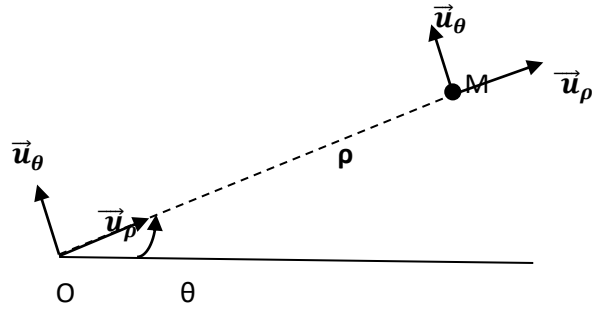
III.1.8.3.2.Coordonnées polaires (ρ,θ) dans un repère$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}_{\rho}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}})$.

III.1.8.3.2.1.Définition des coordonnées polaires.

Ce sont des coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes pour repérer un point dans un plan. Les coordonnes polaires nécessitent simplement une distance et un angle. Elles sont définies par rapport à un axe fixe (Δ), passant par un point O appelé pole.

Les coordonnées polaires du point M sont notées (ρ, θ).

M (ρ, θ) tel que : ρ =$\left|\overrightarrow{OM}\right| \in R^{+}$ est la distance entre O et M, θ ∈ $[0, 2\pi]$ est l'angle entre (Δ) et $\overrightarrow{OM}$.



III.1.8.3.2.2.Définition du repère polaire.

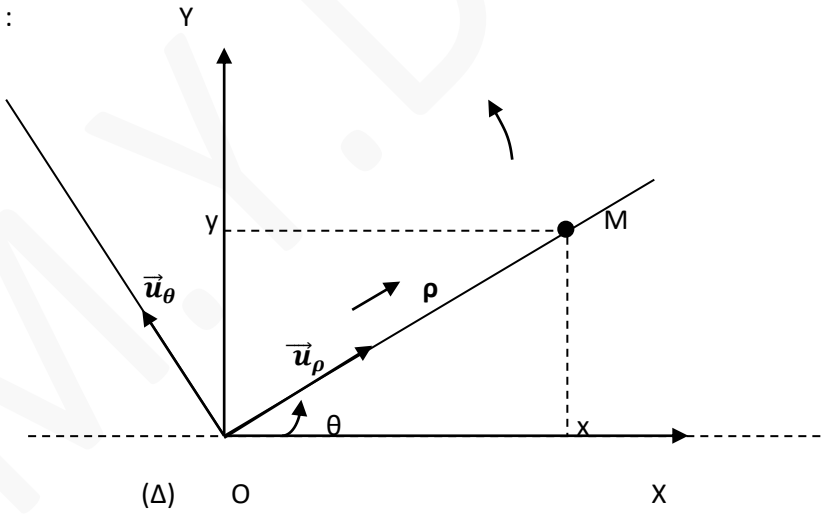
La base du repère polaire est constituée de 2 vecteurs notés $\vec{u}_\rho$ ***et*** $\vec{u}_\theta$ où :

- $\vec{u}_\rho$: $Vecteur\ unitaire\ de\ \overrightarrow{OM}$ donc : $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$, appelé vecteur unitaire radial.
- $\vec{u}_\theta$: $Vecteur\ unitaire\ orthogonal$ tel que : $\vec{u}_\rho . \vec{u}_\theta = 0$ et dirigé dans le sens croissant de θ.

Remarque : A la différence du repère cartésien ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) qui est un repère fixe, le repère polaire ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$) est un repère local : On peut donc le représenter soit au pole O ou plutôt au point M.

III.1.8.3.3.Relation de transfert entre le repère cartésien et le repère polaire.

1-Coordonnées :



ρ = $\sqrt{x^2 + y^2}$, θ = $\tan^{-1}\frac{y}{x}$

2-Vecteurs de base :

Dans le repère ($\vec{\imath},\vec{\jmath}$) on a pour la composante $\overrightarrow{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\rho}}}$:

$Sur\ Ox$: $\overrightarrow{u_\rho}.\vec{\imath} = \left|\overrightarrow{u_\rho}\right|.|\vec{\imath}|.\cos\theta = \cos\theta$

$Sur\ Oy$: $\overrightarrow{u_\rho}.\vec{\jmath} = \left|\overrightarrow{u_\rho}\right|.|\vec{\jmath}|.\sin\theta = \sin\theta$

D'où l'expression de $\overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$

De même pour $\overrightarrow{u_\theta}$

$Sur\ Ox$: $\overrightarrow{u_\theta}\ .\vec{\imath} = |\overrightarrow{u_\theta}|.|\vec{\imath}|.\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$

$Sur\ Oy$: $\overrightarrow{u_\rho}.\vec{\jmath} = |\overrightarrow{u_\theta}|.|\vec{\jmath}|.\cos\theta = \cos\theta$

D'où l'expression de $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$

Remarque : $\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{u_\theta}$

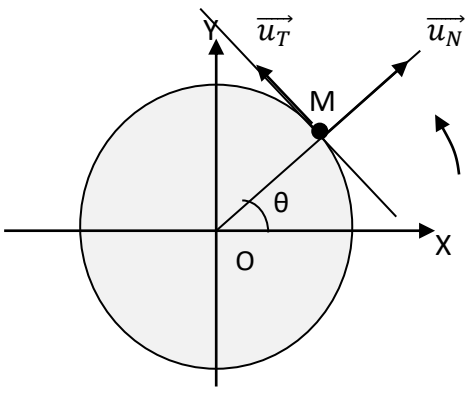
Donc : $\boxed{\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta}}$

La dérivée d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\rho}$ par rapport à un angle est égal au vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire.

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} \perp \overrightarrow{u_\rho}$$

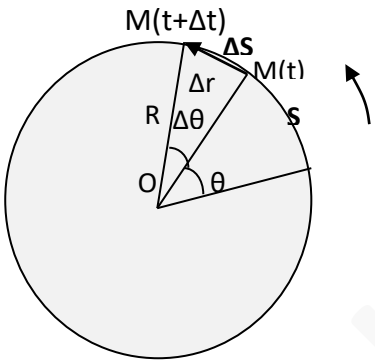
III.1.8.3.3.4.Cas particulier : Mouvement circulaire uniforme

Soit un mobile M qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan XOY.



Il est plus commode de travailler en coordonnées polaires qu'en coordonnées cartésiennes.

: $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\theta(Rad) = \frac{S}{R}$



$$S = R\theta$$

III.1.8.3.3.4.1.Vitesse

La vitesse du mobile M est V = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$

(Car $\Delta S = R\Delta\theta$)

V = $\lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = R \frac{d\theta}{dt}$ = Rω ($\omega = \frac{d\theta}{dt} : Vitesse\ angulaire$)

On dit que le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ = ω est constante.

Le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet est constant et est défini comme la période T du mouvement circulaire uniforme. On a donc :

T = $\frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$

On appelle fréquence du mouvement, le nombre de révolutions effectuées par unité de temps. La fréquence est donc l'inverse de la période.

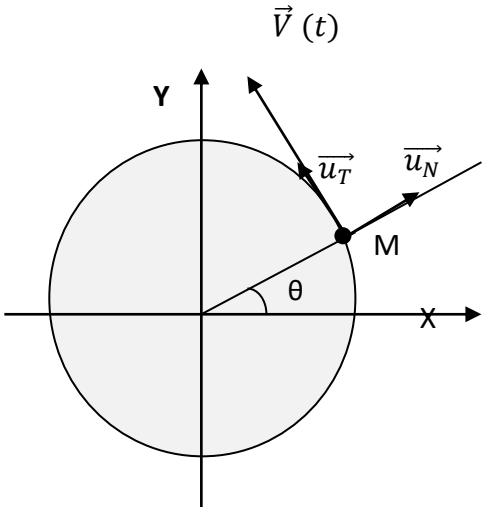
f = $\frac{1}{T}$ ou encore f = $\frac{\omega}{2\pi}$ (Unité S.I./ Hertz (Hz) ou s^{-1}).

Bien que la vitesse v soit constante, l'accélération n'est pas nulle dans un mouvement circulaire uniforme.

III.1.8.3.3.4.2. Accélération

Pour connaitre la direction du vecteur accélération

Il faut dériver l'expression : $\left|\vec{V}\right|.\overrightarrow{u_T} = \vec{V}\ (t)$



$$\vec{a} = \frac{d\left[\left|\vec{V}\right| \overrightarrow{u_T}\right]}{dt}$$

$\vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}.\overrightarrow{u_T} + |\vec{V}|\frac{d[\overrightarrow{u_T}]}{dt}$

Car le vecteur $\overrightarrow{u_T}$ n'est pas constant lorsque le mobile M se déplace le long de sa trajectoire.

$\overrightarrow{u_T}$ est toujours tangent à la trajectoire.

$$\frac{d[\overrightarrow{u_T}]}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

Donc, $\vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}.\overrightarrow{u_T} + |\vec{V}|.\frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\theta} = \overrightarrow{u_N}$

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}.\overrightarrow{u_T} + |\vec{V}|.\overrightarrow{u_N}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}.\overrightarrow{u_T} + |\vec{V}|.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_N}$$

$|\vec{V}| = R\dot{\theta}$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}.\overrightarrow{u_T} + R\dot{\theta}^2.\overrightarrow{u_N} = a_T.\overrightarrow{u_T} + a_N.\overrightarrow{u_N}}$$

Avec : $a_T = \frac{d|\vec{V}|}{dt}$: *Accélération tangentielle*

$a_N = R\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{R}$: *Accélération normale*

Et $a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2$

Dans le cas d'un mouvement curviligne, on introduit la notion de rayon de courbure ρ, par conséquent :

$$a_N = \rho\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{\rho}$$

M.DEBILI

Exemple d'application :

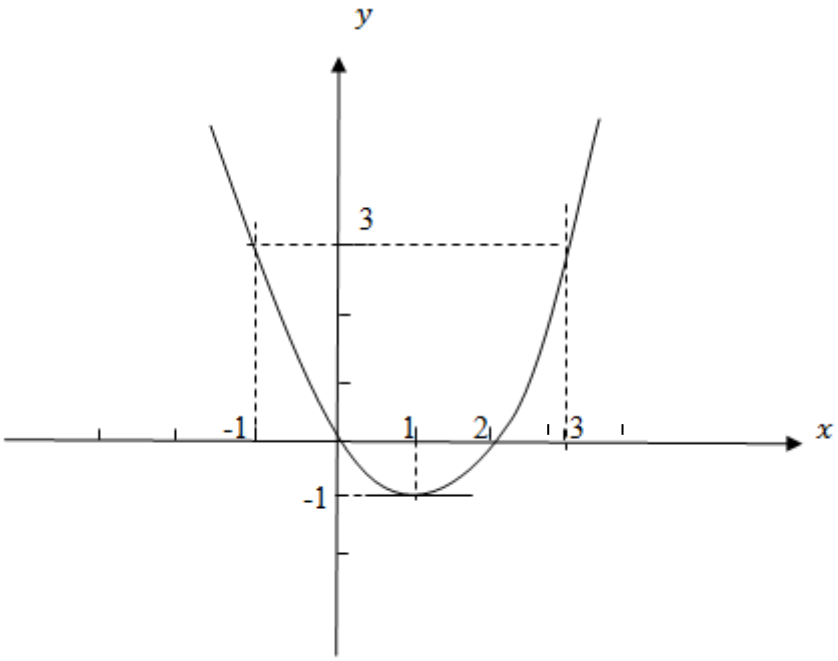
Le mouvement d'un mobile M est décrit par les équation horaires suivantes :

$$x(t) = 2t \ , \ y(t) = 4\,t\,(t - 1).$$

1) **Equation de la trajectoire**

$$t = \frac{x}{2}; \ , \ y(x) = 4\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) \Rightarrow \boldsymbol{y(x) = x^2 - 2x}$$

Représentation graphique: Parabole



2) Nature du mouvement: Curviligne

3) Vitesse : $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 8t-4\end{pmatrix}, |\vec{V}| = \sqrt{4 + (8t-4)^2} = 2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}$

4) Accélération $\vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 8\end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = 8 = Const.$

$a_T = \frac{d|\vec{V}|}{dT} = \frac{d\sqrt{4+(8t-4)^2}}{dt} = \frac{d2\sqrt{16t^2-16t+5}}{dt} = \frac{16(2t-1)}{\sqrt{16t^2-16t+5}}$

$a_N{}^2 = a^2 - a_T{}^2$

$$a_N{}^2 = 64 - \left(\frac{16(2t-1)}{\sqrt{16t^2-16t+5}}\right)^2$$

$a_N = \frac{8}{\sqrt{16t^2-16t+5}}$

5)$a_N = \frac{V^2}{\rho}$, $\rho = \frac{V^2}{a_N}$, $\rho = \frac{4(5+16t^2-16t)\sqrt{16t^2-16t+5}}{8} = \frac{(5+16t^2-16t)^{\frac{3}{2}}}{2}$ (Rayon de courbure)

M.Y.DEBILI