Chapitre 6: Lois de composition internes

6-1 Notions des groupes :

On appelle groupe tout ensemble, G, suivi d'une loi interne. La composition interne posèdant les propriétés suivantes :
(1) Associative : $\forall(a,b,c) \in G^3 : (a*b)*c = a*(b*c)$.
(2) L'élément neutre: $\exists e, \forall a \in G : a*e = e*a = a$.
(3) L'élément symétrique: $\forall a \in G : a*a' = a'*a = e$
un tel groupe est noté $(G,*)$. Il n'est jamais vide puisqu'il contient au moins l'élément neutre e.

6-1-1 Groupe commutatif (un abélien) :

On appelle ainsi un groupe dans lequel la loi est commutative

6-1-2 Groupe additif :

C'est un groupe abélien muni de la loi $+$, et l'élément neutre est 0 :
$a + a' = a' + a$.

exemple : $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien additif.

6-1-3 Groupe fini, infini :

Un groupe est dit infini s'il contient une infinité d'éléments, il est fini et d'ordre n si il contient un nombre fini, n, d'éléments.

6-1-4 Sous groupe :

Une partie, G, d'un groupe $(G,*)$ est appelé sous groupe de G si il a une structure de groupe pour la loi $*$ de G.

• **Théorème 1** : Soit $(G,*)$ un groupe. Une partie non vide G' de G est un sous-groupe de G si et seulement si :
(a) G' est fermé pour la loi $*$, c'est à dire $\forall x,y \in G' : x*y \in G'$
(b) Quelque soit a dans G', son symétrique a' dans G appartient à G'.

Remarque : Soit $(G,*)$ un groupe G' une partie de G, on dit que G' est un sous groupe de G si et seulement si :
$\forall x \in G', \forall y \in\in G' : x*y^{-1} \in G'$ $\;y^{-1}$ étant le symétrique de y, pour la loi $*$,dans G.

6-2 Anneau

Définition : un ensemble non vide A, muni de deux opérations internes, la première notée $+$ et la seconde notée $\cdot$, est appelé anneau si les deux conditions suivantes sont remplies :
(a) L'ensemble $(A,+)$ est un groupe commutatif.
(b) La seconde opération est associative et distributive pour la première.

- Un tel anneau est noté $(A, +, \cdot)$ et il est dit commutatif si la seconde opération est commutative.
- Unitaire si la seconde opération admet un élément neutre (élément unité).

Exemple d'anneau :
L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication.

6-3 Corps

Définition : Un ensemble non vide, K, muni de deux opérations internes, respectivement notées $+$ et $\cdot$, en général est appelé corps si les deux conditions suivantes sont remplies :
(a) L'ensemble $(K, +, \cdot)$ est un anneau unitaire
(b) Tout élément de K^σ ensemble privé de l'élément neutre de l'addition est inversible

Un tel corps est noté $(K, +, \cdot)$ et il est dit commutatif si la seconde opération est commutative, autrement dit, si $(K^\sigma, \cdot)$ est un groupe commutatif.

6-3-1 Propriétés d'un corps :

Un corps $(K, +, \cdot)$ possède toutes les propriétés d'un anneau, plus les suivantes :
1) $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$
2) $(a \cdot c = b \cdot c \text{ et } c \neq 0) \Rightarrow a = b$
3) L'équation $a \cdot x = b$ où $a \neq 0$, admet une solution unique $x = a^{-1} \cdot b$ où a^{-1}désigne le symetrique de a pour la loi "$\cdot$".

6-3-2 Exemple de corps

- L'ensemble des rationnels "Q", muni de l'addition et de la multiplication.
- L'ensemble des réels "$\mathbb{R}$", muni de l'addition et de la multiplication.
- L'ensemble des complexes "$\mathbb{C}$", muni de l'addition et de la multiplication.