Chapitre 5 : Développement limité

5-1 La formule de Taylor

5-1-1 Définition

- Une fonction f est dite de classe C^n si f est dérivable n fois et que toutes ces dérivées jusqu'a l'ordre n sont continue.

- Une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable en $x_0 \in]a, b[$ peut s'écrire au V_{x_0} comme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$
$$\text{avec } R(x) = \varepsilon(x)(x - x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Cela revient à dire que f peut être approximée par le polynôme de degré 1 :

$$x \to f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La formule de Taylor généralise ce résultat en montrant que les fonctions n fois dérivables peuvent être approximées dans un V_{x_0} par des polynômes de degré n.Plus exactement :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{P_n(x)} + R_n(x)$$

$R_n(x)$ est l'erreur

5-1-2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n)}$ dérivable dans $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$; $\forall x \in [a, b] \quad x \neq x_0$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

où c est un point $\in]x_0, x[$. Le terme $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.

5-1-3 Formule de Taylor avec le reste de Young

$f \in [a, b] \to \mathbb{R} \quad x_0 \in [a, b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (fini).
Alors $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(x - x_0)^n$$

$O(x - x_0)^n = R_n(x_0, x)$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x_0,x)}{(x-x_0)} \to 0$

5-1-4 Formule de Maclaurin

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule Taylor-Lagrange on obtient la fornule dite Maclaurin à order $n + 1$ avec reste de Lagrange

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n+1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_x) \qquad \theta \in]0, 1[.$$

5-2 Le développement limité

On va se limité à l'étude du développement limité de certaines fonctions en V_0.

5-2-1 Définition :

Soit f une fonction définie on V_0, on dit que f admet un développement limité d'ordre n s'il existe des coefficients et une fonction ε telque $\forall x \neq 0$ dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; On a :

$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) \to 0$

$P(x) = a_0 -'' P(x)$

On peut remplacer $x^n \varepsilon(x)$ par le terme $O(x^n)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$.

5-3 Applications :

Dans cette partie on donne le D.L des fonctions usualles :

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x4}{4!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}.\varepsilon(x)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n.\varepsilon(x)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n.\varepsilon(x)$

$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{(1+x)^\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n.\varepsilon(x)$

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6.\varepsilon(x)$

$Shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

$Chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}.\varepsilon(x)$

$Thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5.\varepsilon(x)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p!} + x^p.\varepsilon(x)$

$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2p)} . \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

$\arg thx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

$\arg shx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2p)} . \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

Exemple :

Calculer la limite suivante à l'aide du D.L

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{0}{0}$ F.I ; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

On developpe $\cos x$, $\sqrt{1-x^2}$ à l'ordre 4.

$\cos x$ à l'ordre 4 : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^4)$

$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 4 :

$\underset{\alpha=\frac{1}{2}}{(1+x)^\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + O(x^4)$

ici on a : $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + O(x^4)$

$\Rightarrow (1+(-x^2))^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^4 + O(x^4)$

$\Rightarrow (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^4)$

On remplace dans la limite on aura :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^4))}{x^4}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\frac{1}{4!} + \frac{1}{8})x^4}{x^4} = (\frac{1}{24} + \frac{1}{8}) = \frac{1+3}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$