Chapitre 3 : Les fonctions réelles à une variable réelle

3-1 La limite d'une fonction

3-1-1 Définitions

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0, a une limite ℓ au point x_0, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un nombre $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \neq x_0$ vérifiant $0 < |x - x_0| < \alpha$, on ait $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

En abrégé :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $f(0) \neq 1$, donc f n'admit pas le nombre $\ell = 2$ comme limite au point $x_0 = 0$.

* **Remarque**

• Si f admit une limite au point x_0, cette limite est unique.

3-1-2 Limite à gauche, Limite à droite

• On dit que f a une limite à droite au point x_0 si :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$; $\forall x :\ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ et on notera $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l(x_0^+)$

• On dit que f admit une limite à gauche du point x_0 si :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$; $\forall x :\ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l(x_0^-)$

3-1-3 Le cas ou x devient infini

Par définition l'expression $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ signifie

$\forall \epsilon > 0$, $\exists\ A > 0$ tel que $x > A \Leftrightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

De même façon $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ signifiera que : $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ A > 0$ tel que $x < -A \Leftrightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

3-1-4 Limite infinie

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on posera par définition

$\lim f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

$\lim f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$

Si $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$, on posera

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, $\exists\ B > 0$ / $x > B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, $\exists\ B > 0$ / $x < -B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\ ,\ \exists\ B > 0\ x > B \Rightarrow f(x) < -A$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\ ,\ \exists\ B > 0\ /\ x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$

3-1-5 Opération sur les limites

Soient f , g deux définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et admettant respectivement des limites finies , ℓ , $\ell^{'}$ au point x_0. Alors :
$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell^{'}$; $\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda\ell \quad (\lambda \in \mathbb{R})$;
$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot \ell^{'}$; $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$; $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell^{'}}$ si $\ell^{'} \neq 0$;
si $f(x) < g(x) \Rightarrow \ell \leq \ell^{'}$.

3-2 La continuité d'une fonction

3-2-1 Fonctions continues en un point

1) soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est à dire :
$\forall\epsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ \ /\ \forall\ x \in I\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
2) On dit que f est continue à droite de x_0 si :
$\forall\epsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ \ ,\ \forall\ x \in I\ \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, on écrit $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$
3) On dit que f est continue à gauche du point x_0 si :
$\forall\epsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ \ ,\ \forall\ x :\ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
on écrit $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$
4) On dit que f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite de x_0.

3-2-2 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf peut-être en $x_0 \in I$. Supposons que ℓ est la limite au point x_0, la fonction $\widetilde{f}$ (f tilda) définie par
$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I\ \setminus \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$
On dit que $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f au point x_0 .
soit par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ on peut lui associer la fonction $\widetilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ en posant
$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

* **Remarques**
• on dit que f est continue sur un intervalle $\mathbb{Z}$ si et seulement si elle est continue en tout point x_0 de I.
• Chaque fonction est continue sur son domaine de définition Df

3-2-3 Théorèmes sur les fonctions continues

Soient deux fonction f et g

1) **Théorème 1 :** si on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et que g est une fonction continue en l alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\ell)$

2) **Théorème 2 :** si f , g sont deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions suivantes sont continues :
$f+g$, $f \cdot g$, λf sont continues en x_0 si $g(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0

Théorèmes des valeurs intermédiaires

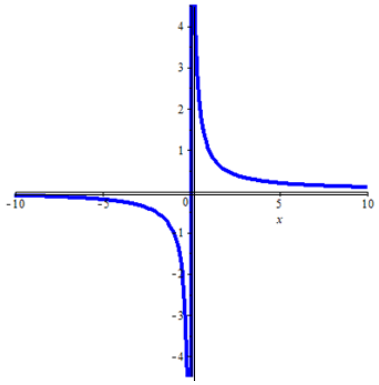
1) **Théorème 1:** soit f une fonction continue sur I (I un intervalle fermé $[x_1, x_2]$ et $f(x_1) \times f(x_2) < 0$ alors il $\exists$ au moins $C \in \mathbb{R}$ tq $C \in]x_1, x_2[$ et $f(C) = 0$.

2) **Théorème 2 :** soit f une fonction continue sur $I = [x_1, x_2]$ et soit $A \in \mathbb{R}$ tq $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$ alors il $\exists$ au moins un nombre réel C / $C \in [x_1, x_2]$ alors on a : $f(C) = \lambda$.

3-2-4 Exemples de fonctions discontinues

Une fonction qui n'est pas continue en un point est dite discontinue en ce point. Il existe des fonctions définies sur un intervalle I et qui ne sont pas continues

Exemple 1 :
$f(x) = \frac{1}{x}$



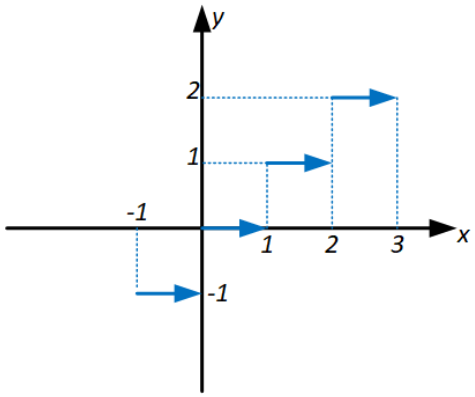
Graphe de la fonction $\frac{1}{x}$

f n'est pas continue à l'origine $x \neq 0$, $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $\searrow$ décroissante < 0 $\forall$ $x \in \mathbb{R}^*$

Exemple 2 :

$f(x) = \underset{x\in\mathbb{R}}{[x]}$ partie entière de x

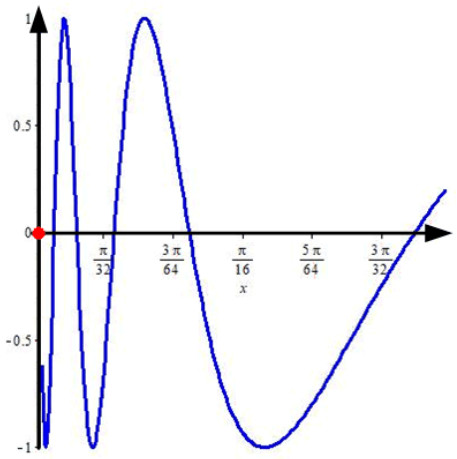
Fonction escalier $x \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Z}$



Fonction escalier

Exemple 3 :

La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\qquad \sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi}} = \sin 2\pi$



Graphe de la fonction $f(x)$

la fonction est continue pour tout $x \neq 0$ est discontinue a l'origine c'est à dire $x = 0$.

3-3 Dérivée et différentiabilité d'une fonction

3-3-1 Définitions

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$: $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est dérivable au point x_0 si la limite suivante $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$ est finie.
Cette limite qui est alors unique, est appelée dérivée de f au point x_0.
Si on pose $x - x_0 = h$, alors la limite s'écrit : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell$

2) La dérivée à droite, La dérivée à gauche

La dérivée à droite du point x_0 est donnée par la formule suivante :
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_d^{'}(x_0)$
La dérivée à gauche d'un point x_0 est donnée par :
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g^{'}(x_0)$

* **Remarque**

• Pour que f soit dérivable en un point x_0 il faut et il suffit que
$f_d^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0)$

Exemple :

1) La fonction $x \to |x|$ définie sur $\mathbb{R}$

si $x \geq 0$ $\begin{matrix} f(x) = x \\ f(0) = 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0_+^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = 1$

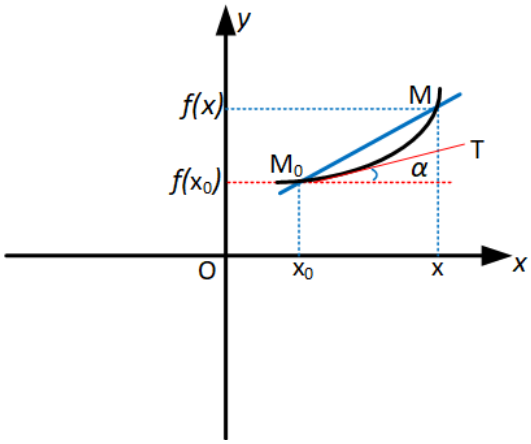
et si $x < 0$ $f(x) = -x$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0_-^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = -1$

$\Rightarrow f_d^{'}(0) \neq f_g^{'}(0) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

2) la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable à l'origine car
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \to \infty$ n'est pas finie

3-3-2 Interprétation géométrique

soit f une fonction dérivable en x_0 la droite d'équation
$y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$ s'appelle tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.
L'interprétation géométrique du rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (pente de M_0M).



Graphe de f'

3-3-3 Différentielle

Définition : une fonction f définie dans au voisinage V d'un point x_0 est dite différentiable en x_0 s'il existe un nombre α tel que la fonction ϵ définie pour $h \neq 0$ par $f(x_0+h) - f(x_0) = \alpha h + h\varepsilon(h) \quad x_0 + h \in V$, admet la limite 0 quand h tend vers 0.

* **Remarque**

• Une fonction est différentiable en un point x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.

• $y' = \frac{dy}{dx}$ on note que la différentielle de f au point x et dy.

• Si une fonction est dérivable en un point alors elle est continue en ce point.

3-3-4 Théorème de Rolle et Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $C \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. $\exists\ c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

3-3-5 Règle de l'Hôpital

Si f et g sont deux dérivables dans un voisinage de g et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet la même limite en ce point.
Cette methode s'applique aux formes indetermine $\frac{0}{0}$.

3-3-6 Opérations sur les fonctions dérivables

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ si les $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en x_0 alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ αf est dérivable en x_0 et l'on a en ce point
$(\alpha f)' = \alpha f\ '; (f+g)' = f' + g'; (fg)' = f'g + g'f$
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ pour $g(x_0) \neq 0$.
$(f^n)' : n \in \mathbb{R} \quad (f^n)' = nf'f^{n-1}$.