Chapitre 2 : Les ensembles, les relations et les applications

2-1 Théorie des ensembles

2-1-1 Ensembles

1) **Définition :** on considèrera un ensemble comme une collection d'objet rassemblés d'après une propriété commune. Par exemple l'ensemble des points d'un plan, ou bien l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ ainsi de suite. Un ensemble est constitué l'éléments, l'élément x appartenant à l'ensemble E et on note $x \in E$.La négation s'écrit $x \notin E$.

2) Partie d'un ensemble

Un ensemble A dont tout ses éléments appartiennent à un ensemble E est appelé partie ou sous ensemble de E, on écrit $A \subset E$, la négation s'écrit $A \not\subset E$.

On note par $\emptyset$ l'ensemble vide (une partie ne contenant aucun élément).

On appelle $C_E A$ complémentaire d'une partie A de E; $A \subset E$ et $C_E A \subset E$

$C_E A = \{x \in E, \text{ et } x \notin A\}$; tq $E = A \cup C_E A$.

A et B deux partie de E ; $B \subset A$, on désigne $A \backslash B = \{x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

3) Rappel de logique

soient P et Q deux propositions on a:

$(\overline{P \text{ ou } Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$

$(\overline{P \text{ et } Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \underline{\overline{P}})$

$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$

4) Réunion intersection et produit des ensembles

• On appelle réunion de deux ensembles E et F l'ensemble noté $E \cup F$.
Les éléments de $E \cup F$ appartiennent à E ou F.
$E \cup F = \{x \in E \text{ ou } x \in F\}$.

• On appelle intersection de deux ensembles E et F l'ensemble noté $E \cap F$ formé des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F.
$E \cap F = \{x \in E \text{ et } x \in F\}$.

• On appelle produit de deux ensembles E et F l'ensemble noté $E \times F$, de tous les couples ordonnés (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$

2.1.2 Opérations élémentaires

Soients A, B, C des ensembles dans E ; alors on a :

1) Commutativité : $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2) Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

3) Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4) si A et B sont deux sous-ensembles de E, alors on aura :
$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;
$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$;
$A \cap C_E A = \emptyset$;
$C_E(C_E A) = A$.
5) Si $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$
6) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2-2 Relation d'ordre ; Relation d'équivalence

2-2-1 Relation d'ordre

Définition : une relation binaire sur un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est :
• Réflexive : $\forall x \in E \; x\Re x$.
• Transitive : $\forall x, y, z$ dans E : $(x\Re y$ et $y\Re z) \Rightarrow x\Re z$.
• Antisymétrique : $\forall x, y \in E$: $(x\Re y$ et $y\Re x) \Rightarrow x = y$.

Exemple : Soit Q l'ensemle des nombres rationnels, la relation définie par $x\Re y$, si $x \leq y$; $\Re$ est une relation d'ordre.

2.2.2 Relation d'équivalence, Classe d'équivalence

1) Définition : une relation binaire $\Re$ sur un ensemble E est dite relation d'équivalence si elle est :
a) Réflexive : $\forall x \in E : x\Re x$.
b) Symétrique : $\forall x, y \in E : x\Re y \Rightarrow y\Re x$.
c) Transitive : $\forall x, y, z \in E : (x\Re y$ et $y\Re z) \Rightarrow x\Re z$.

2) Classe d'équivalence : Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\Re$. On appelle classe d'équivalence une partie de E formée de tous les éléments équivalents à l'un d'entre eux. On associe pour chaque élément $x \in E$ une classe d'équivalence C_x qui s'écrit $C_x = \{s \in E \;/\; s\Re x\}$.

2-3 Les applications

2-3-1 Définitions

1) E et F étant deux ensembles on appelle application de E dans F, une fonction définie sur E à valeur dans F, toute correspondance f qui à chaque éléments x de E, fait correspondre un élément de F, noté $f(x)$ $(f : E \to F)$
Deux applications sont égales si elles ont le même ensemble, départ, arrivé et le graphe.

Exemple 1 : l'application identique I_E de E dans E , définie pour tout $x \in E$ par $I_E(x) = x \quad I_E : E \to E$

Exemple 2 : $f : R \to \mathbb{R}$
$f(x) = x - \frac{1}{2}$

2) Application composée : Soient E, F, G trois (3) ensembles, $f : E \to F$
$g : F \to G$, on note application composée est une application
$h = g \circ f : E \to G \quad h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in E.$

2-3-2 Applications injective, surjective et bijective

Définition 1 : on dit que $f : E \to F$ est une application injective si on a :
$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Définition 2 : $\forall y \in F, \exists\, x \in E$ tq $f(x) = y.$

Définition 3 : on dit qu'une fonction est bijective si elle et injective et surjective en même temps.

2-3-3 Application réciproque : Soit $f : E \to F$, supposons que f est bijective et notons $f^{-1}(y)$ l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$. L'application, noté f^{-1}, qui à y associe $x = f^{-1}(y)$ s'appelle application réciproque.

Définition : f^{-1} est aussi bijective et l'on a :
$\forall x \in E : (f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall y \in F : (f^{-1} \circ f)(y) = y.$
$f^{-1} \circ f$ est donc d'application identique dans E, et $f \circ f^{-1}$ est donc d'application identique dans F.

*** Remarque :** si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications bijectives alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2-3-4 Image direct, Image réciproque d'une partie

• Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. On appelle image (ou image directe) de A pour f le sous-ensemble de F, noté $f(A)$, formé de tous les éléments $f(x)$ où $x \in A$.
• Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B pour f la partie de E, noté $f^{-1}(B)$, formée de toutes les éléments x tel que $f(x) \in B$.

2-3-5 Propriétés

soit $f : E \to F$ A et B deux parties de E, telle que on a :
$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
$f(C_E A) \neq C_F f(A)$

Si f est une bijection alors si :
• $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(CA) = Cf^{-1}(B)$