Chapitre 1: Méthode du raisonnement mathématique

1-1 Raisonnement direct

Pour montrer que l'assertion $\ll P \Rightarrow Q \gg$ est vraie : on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1 :

Montrer que si $a \in Q$ et $b \in Q$ alors $a + b \in Q$

$a \in Q \Rightarrow \exists \;\; P \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tq $a = \frac{p}{q}$;

$b \in Q \Rightarrow \exists \;\; P' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{Z}^*$ tq $a = \frac{p'}{q'}$

donc $a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$; avec $pq' + qp' \in \mathbb{Z}$

et $qq' \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow a + b \in Q$

1-2 Raisonnement par contraposition

Basé sur l'équivalence entre les assertions

$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow non(Q) \Rightarrow non(P)$

$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Exemple 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$;montrer que si n^2 est pair alors n est pair

On suppose que n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair.

1-3 Raisonnement par l'absurde

P est vraie ; on suppose que $\overline{P}$ est vraie

$\overline{P} \Rightarrow Q(fausse)$ donc $\overline{P}$ est fausse, ce qui veux dire que P est vraie

Pour montrer que $\ll P \Rightarrow Q \gg$ on suppose que P est vraie et que Q est fausse, et on cherche une contradiction.

Exemple 3 :

Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$; avec $a, b \geq 0$.

1-4 Raisonnement par contre exemple

Le raisonnement par contre exemple s'appuie sur l'équivalence logique $[\forall x \in E$, alors $P(x)$ est vraie$]$ est faux $\Leftrightarrow$ ($\exists$ au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux); avec $P(x)$ est une assertion.

Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

Peut on en conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$.

la réponse est **non**

1-5 Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) On prouve qu elle est vraie pour n_0
2) On fixe $n \geq n_0$

On suppose que $P(n)$ est vraie et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
Principe de récurrence est vraie

Exemple 4 :

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^n > n$.
$n_0 = 0$ donc $P(0)$ et vraie ?
Oui $2^0 > 0 \Rightarrow 1 > 0$ vraie
On suppose que c'est vraie pour $n \Rightarrow^?$vraie pour $n+1$
$P(n+1) : 2^{n+1} > n+1$
on a $2^n > n \Rightarrow 2^n + 2^n > n + n \Rightarrow 2 \times 2^n > 2n > n+1 \Rightarrow 2^{n+1} > n+1$
vraie $\forall n > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ on a $2^n > n$.