

## Chapitre II Calcul Vectoriel

### II.1 Rappels sur les vecteurs

#### II.1.1 .Définition

Un vecteur est assimilable à une flèche telle que :

- La droite support correspond à la direction.
- La pointe de la flèche correspond au sens.
- La longueur correspond au module ou intensité.

Un vecteur est également caractérisé par une origine et une extrémité. Il est noté  $\vec{V}$  (Voir figure 1).

L'origine du vecteur n'est pas forcément l'origine du repère (Oxyz)

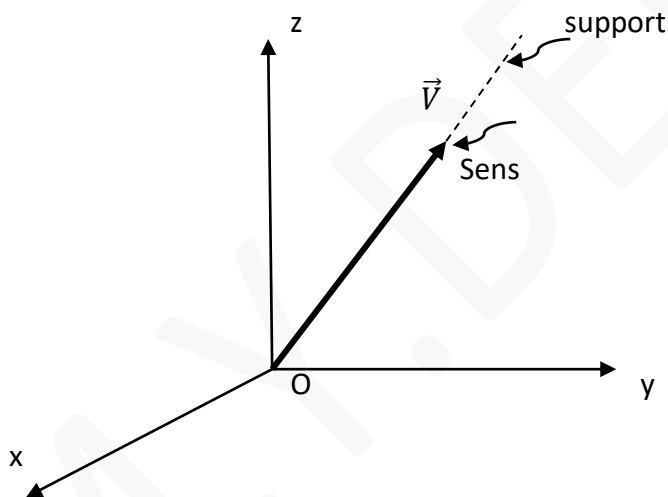


Figure 1.Représentation d'un vecteur

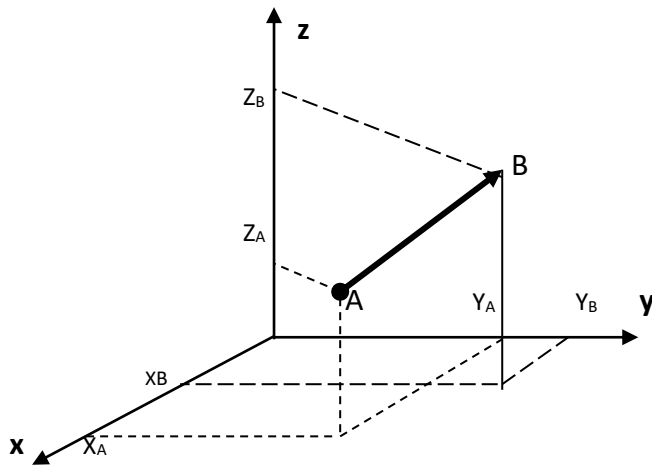
#### II.1.2 .Coordonnées d'un vecteur

Soit un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  d'origine A et d'extrémité B.

Les coordonnées des points A et B par rapport au repère Oxyz sont respectivement :

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont donc  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$



### II.1.3. Vecteurs égaux

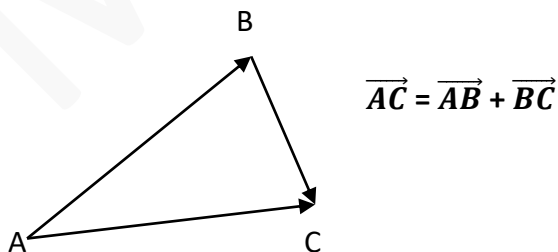
#### II.1.3.1. Définition

On dit que deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux s'ils vérifient les trois conditions suivantes en même temps : Même longueur :  $AB=CD$ , même direction :  $AB \parallel CD$  et même sens .



### II.1.4. Somme de deux vecteurs

#### II.1.4.1. Relation de Chasles

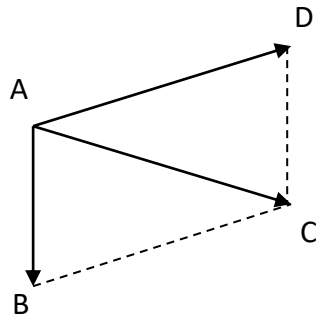


$\overrightarrow{AC}$  est la somme de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$

Remarque :

La relation  $AC = AB + BC$  n'est vérifiée que si B appartient au segment AC.

#### II.1.4.2. Règle du parallélogramme.



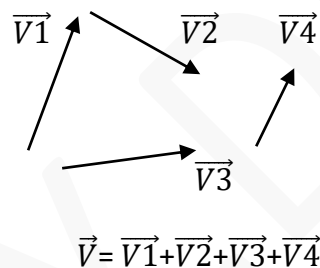
Si ABCD est un parallélogramme, alors :  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Quels que soient A, B, C et D.

#### II.1.4.3. Additions de vecteurs

On peut additionner les vecteurs comme les nombres réels.

On peut faire l'addition de plus de deux vecteurs et l'ordre peut être changé sans que cela influe sur le résultat final.



On obtient le vecteur résultant ou le vecteur somme  $\vec{V}$  par addition des vecteurs deux à deux.

##### -Vecteur nul

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur nul si le point A est confondu avec le point B : Il devient

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

##### -Vecteurs opposés

Deux vecteurs sont dits opposés si leur somme est un vecteur nul. Ils possèdent le même module mais sont de sens opposés.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

### -Soustraction de deux vecteurs

Soustraire un vecteur à un autre revient à lui ajouter l'opposé de ce vecteur

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

### II.1.5. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Pour multiplier un vecteur par un nombre réel k :

- On conserve la direction du vecteur
- On multiplie la longueur du vecteur par k
- Si  $k > 0$ , on conserve le sens du vecteur.

Considérons deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  ainsi que deux nombres réels x et y, on a :

$$X(y) \vec{V}_1 = (xy) \vec{V}_1$$

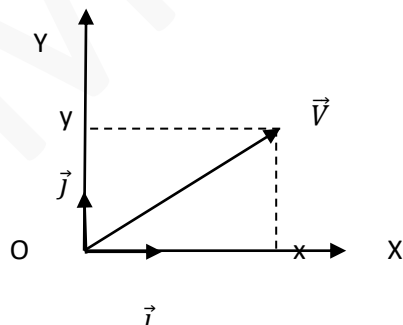
$$x\vec{V}_1 + y\vec{V}_1 = (x + y) \vec{V}_1$$

$$x(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = x\vec{V}_1 + x\vec{V}_2$$

**Application :** Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en effectuant une multiplication par un nombre réel. Donc, deux vecteurs colinéaires ont même direction.

### II-2- Coordonnées d'un vecteur dans une base

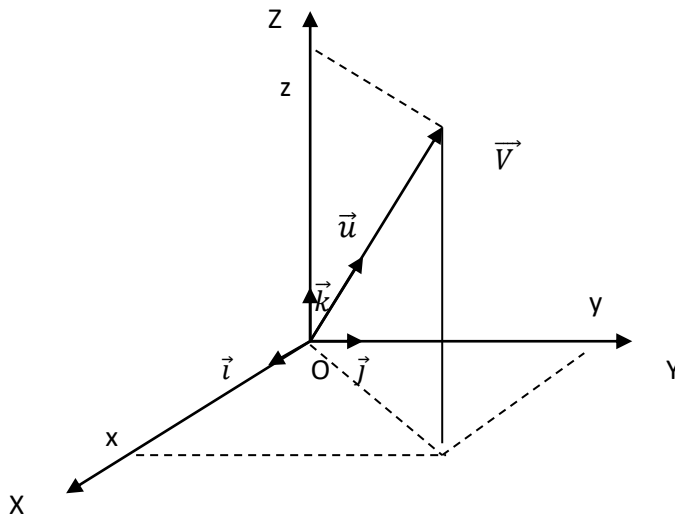
#### II-2-1- Projection d'un vecteur dans le plan.



(X, O, Y) repère orthonormé muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout vecteur du plan, il existe un unique doublet de réels  $(x, y)$  tel que :  $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$

On notera alors :  $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ou  $(x, y)$ , la norme ou module du vecteur  $\vec{V}$  est alors :  $\sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{V}|$

## II-2-2- Projection d'un vecteur dans l'espace.



$(X, O, Y, Z)$  est un repère orthonormé muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Pour tout vecteur de l'espace, il existe un unique triplet de réels  $(x, y, z)$  tel que :  $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

On notera alors :  $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ou  $(x, y, z)$ , la norme ou module du vecteur  $\vec{V}$  est alors :  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{V}|$ .

### II.1.2.1. Vecteur unitaire ou vecteur directeur

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par le vecteur  $\vec{V}$ ,  $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$  tel que  $(|\vec{u}| = 1)$

$$\vec{u} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$$

$$\text{Avec : } \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \alpha, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \beta \text{ et } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \gamma$$

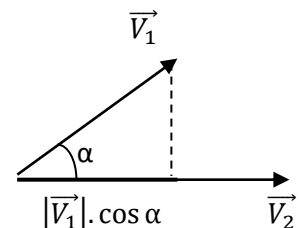
$\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  et  $\cos \gamma$  sont les cosinus directeurs tels que :  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

## II-3-Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , noté  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ , est un scalaire égal au produit des modules des deux vecteurs par le cosinus de l'angle  $\alpha$  qu'ils forment entre eux.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos \alpha$$

Le produit scalaire est: positif pour  $\theta < 90^\circ$ , négatif pour  $\theta > 90^\circ$



Le produit scalaire de deux vecteurs est également égal au produit du module de l'un des vecteurs par la mesure algébrique de la projection de l'autre vecteur.

**Forme analytique :** En posant  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  les composantes respectives de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tels que :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est le **scalaire** défini par la relation :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

**Exemple 1:**

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs :

$\vec{V}_1(1,1,2)$  et  $\vec{V}_2(-1,2,3)$  et déterminer l'angle  $\alpha$  entre ces deux vecteurs.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -1 + 2 + 6 = 7$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos \alpha, \text{ avec } |\vec{V}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{ et } |\vec{V}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{7}{\sqrt{6} \sqrt{14}} = 0.76, \text{ donc } \alpha = 39^\circ 93'.$$

**Propriétés :**

$$\text{Commutativité : } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$$

$$\text{Distributivité : } \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$$

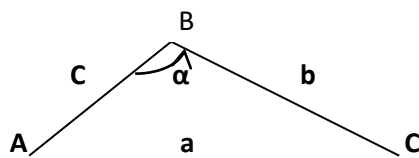
$$\text{Associativité : } \vec{V}_1 \cdot (y \vec{V}_2) = (y \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = y \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

Si  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$  et que  $\vec{V}_1 \neq 0$  et  $\vec{V}_2 \neq 0$ , alors  $\vec{V}_1$  est perpendiculaire à  $\vec{V}_2$ .

**Applications :**

**En géométrie :**

- Détermination du cosinus de l'angle entre deux vecteurs (Voir exemple 1).
- Relation métrique dans un triangle quelconque



$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$(\vec{BC})^2 = (\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) = (\vec{BA})^2 + (\vec{AC})^2 + 2 \cdot \vec{BA} \cdot \vec{AC} = (\vec{BA})^2 + (\vec{AC})^2 - 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

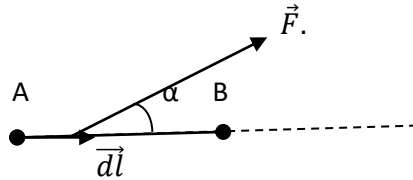
$$(\vec{BC})^2 = (\vec{BA})^2 + (\vec{AC})^2 - 2 \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Donc, } a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

En physique :

- Travail élémentaire  $dW$  d'une force  $\vec{F}$  constante dont le point d'application se déplace de  $\vec{dl}$  :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha, \quad W = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

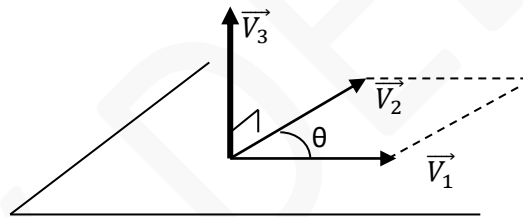


#### II-4-Produit vectoriel de deux vecteurs

##### Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  formant entre eux un angle  $\theta$  est un vecteur  $\vec{V}_3$  noté  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ .

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$



- Direction :  $\vec{V}_3 \perp \vec{V}_1$  et  $\vec{V}_3 \perp \vec{V}_2$

- Sens : Trièdre direct  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$
- Module :  $|\vec{V}_3| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \sin \theta$

##### Propriétés :

Si  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \neq \vec{0}$ , alors  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$  forment un repère droit (trièdre direct).

- Le produit vectoriel est anticommutatif :  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- Distributivité :  $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$
- Associativité :  $\vec{V}_1 \wedge (y\vec{V}_2) = (y\vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = y \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$
- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$  si  $\vec{V}_1 = \vec{0}$  ou  $\vec{V}_2 = \vec{0}$

### Forme analytique :

En posant  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  les composantes respectives de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tels que :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le **vecteur** défini par la relation :

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

Démonstration:

1) *Ecriture verticale des coordonnées :*

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \vec{i} \\ y_1 & y_2 & \vec{j} \\ z_1 & z_2 & \vec{k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \vec{j} \\ y_1 & y_2 & \vec{k} \\ z_1 & z_2 & \vec{i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & \vec{i} \\ z_1 & z_2 & \vec{j} \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(z_2 y_1 - z_1 y_2) - \vec{j}(z_2 x_1 - z_1 x_2) + \vec{k}(y_2 x_1 - y_1 x_2) \\ \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \end{aligned}$$

1) *Ecriture horizontale des coordonnées :*

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= (x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(z_2 y_1 - y_2 z_1) - \vec{j}(z_2 x_1 - x_2 z_1) + \vec{k}(y_2 x_1 - x_2 y_1) \\ \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \end{aligned}$$

### Exemple 2 :

Calculer le produit vectoriel des deux vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1(1,1,2) \quad \text{et} \quad \vec{V}_2(-1,2,3)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i}(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - \vec{j}(3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + \vec{k}(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = -\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

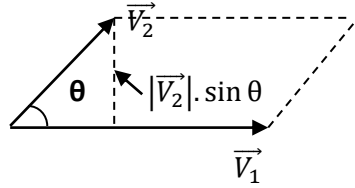
### Applications :

#### En géométrie :

- $|\vec{V}_3|$  est la surface du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

Remarquons tout d'abord que l'aire ou surface du parallélogramme  $A = \underbrace{|\vec{V}_1|}_{\text{Base}} \times \underbrace{(|\vec{V}_2| \cdot \sin \theta)}_{\text{Hauteur}}$ .

$$A = |\vec{V}_1| \times |\vec{V}_2| \cdot \sin \theta = |\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$$



La surface du triangle engendré par  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est égale à  $\frac{1}{2} |\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$ .

- Equation cartésienne d'une droite (D) passant par deux points A et B d'un plan xOy.

Si un point  $M \in (D)$  alors :  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

#### En Physique :

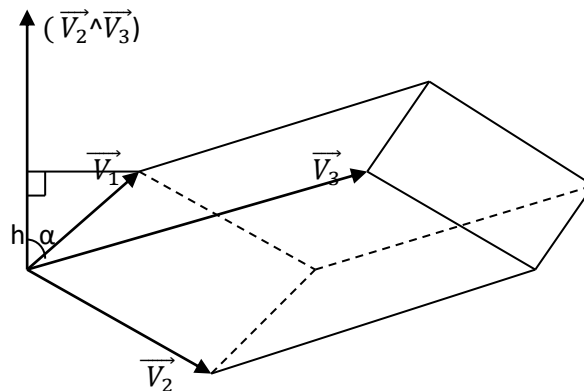
- Moment d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par rapport à un point O /  $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$
- Force subie par une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique uniforme :  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

### II-5-Produit mixte de trois vecteurs

On appelle **produit mixte** entre trois vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ , le scalaire défini par :  $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ .

Interprétation géométrique :

Sa valeur absolue est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ .



$(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$  = surface du parallélogramme construit sur  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  = S

h : projection de  $\vec{V}_3$  sur  $(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

$$|\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3| \cdot \cos \alpha \quad (\alpha : \text{angle entre } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

$$|\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)| = |\vec{V}_1| \cdot \cos \alpha \cdot |\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3| = h \times S = \text{Volume}$$

#### Propriétés :

-Anti commutativité

-Distributivité

#### Applications :

##### En géométrie :

- Détermination du volume d'un parallélépipède connaissant les arêtes
- Equation cartésienne d'un plan (P) passant par trois points

##### En Physique

- Travail des forces magnétiques

#### II-5-Double produit vectoriel

On appelle double produit vectoriel entre trois vecteurs  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ , le vecteur  $\vec{D}$  défini par :

$$\vec{D} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$