**Université Badji Mokhtar**
**Département de Géologie**
**Première année LMD**
**Année 2020/2021**
**Physique 1**

# Solution Série 3

**(Cinématique du point matériel)**

## Exercice 1

### 1) a) Equation de la trajectoire :

Le mouvement du point matériel M est défini par les expressions suivantes : x=3t+1 et y=4t+1

A partir de l'équation x=3t+1, on tire : $t = \frac{x-1}{3}$

En remplaçant t par son expression dans celle de y, on obtient l'équation de la trajectoire:

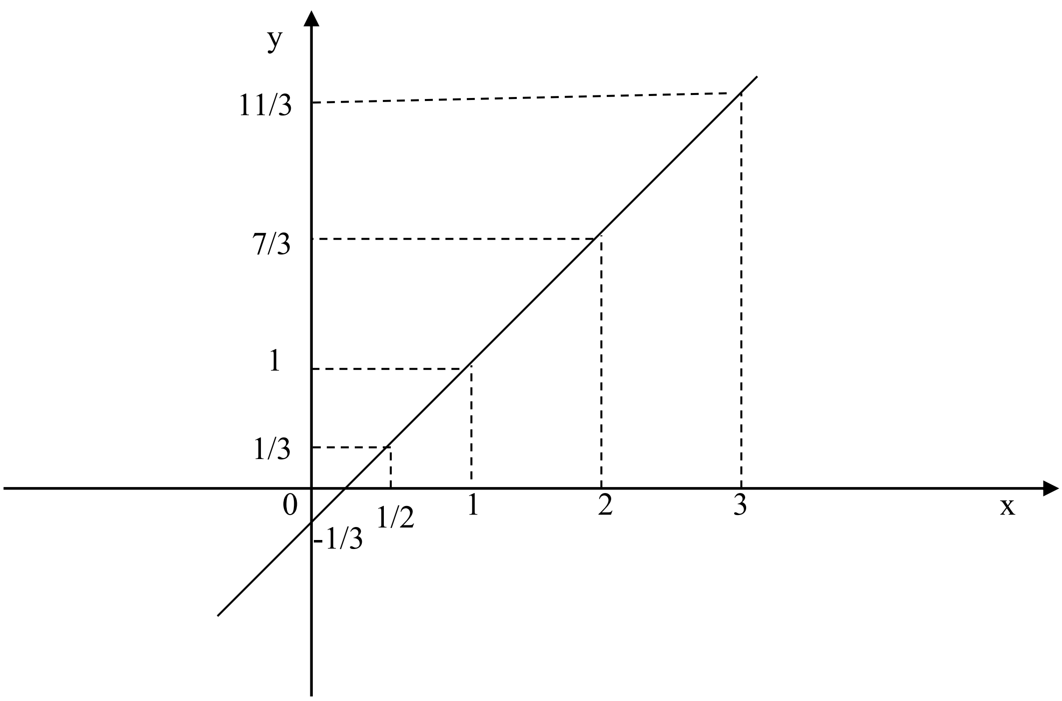
$$y = 4\left(\frac{x-1}{3}\right) + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

### b) Représentation graphique :

A partir de l'équation de la trajectoire ( $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ ) et en attribuant des valeurs à x, on obtient les valeurs correspondantes de y (tableau ci-dessous).

| x | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{11}{3}$ |

En utilisant les différentes valeurs de x et y, rassemblées dans le tableau ci-dessus, on trace la trajectoire y=f(x) dans le repère 0xy.



**2) a) Vecteur vitesse et son module**

On a : $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t+1) = 3$ et $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4t+1) = 4$

Par suite, le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

Le module du vecteur vitesse s'écrit : $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

**b) Vecteur accélération et son module :**

On a : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3) = 0$ et $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(4) = 0$

Par suite, le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = 0$

Le module du vecteur accélération s'écrit : $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

**3) Nature du mouvement :**

La trajectoire est une droite, l'accélération nulle et la vitesse constante ; par conséquent, le mouvement est rectiligne uniforme.

## Exercice 2

**1)a) Equation de la trajectoire :**

Les équations de mouvement de la particule M sont : x = 2t et y = 4t(t-1).

A partir de x = 2t, on tire t, soit : $t = \frac{x}{2}$

En remplaçant t par son expression dans celle de y, on obtient l'équation de la trajectoire:

$$y = 4t(t-1) = 4t^2 - 4t = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 - 2x$$

**b) Représentation graphique de la trajectoire:**

On a : $y = x^2 - 2x$

Domaine de définition : D=]-∞, +∞[

La dérivée, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x) = 2x - 2$

y'= 0 $\Longrightarrow$ 2x-2=0 $\Longrightarrow$ x=2/2=1

x<1 $\Longrightarrow$ y'< 0

x>1 $\Longrightarrow$ y'>0

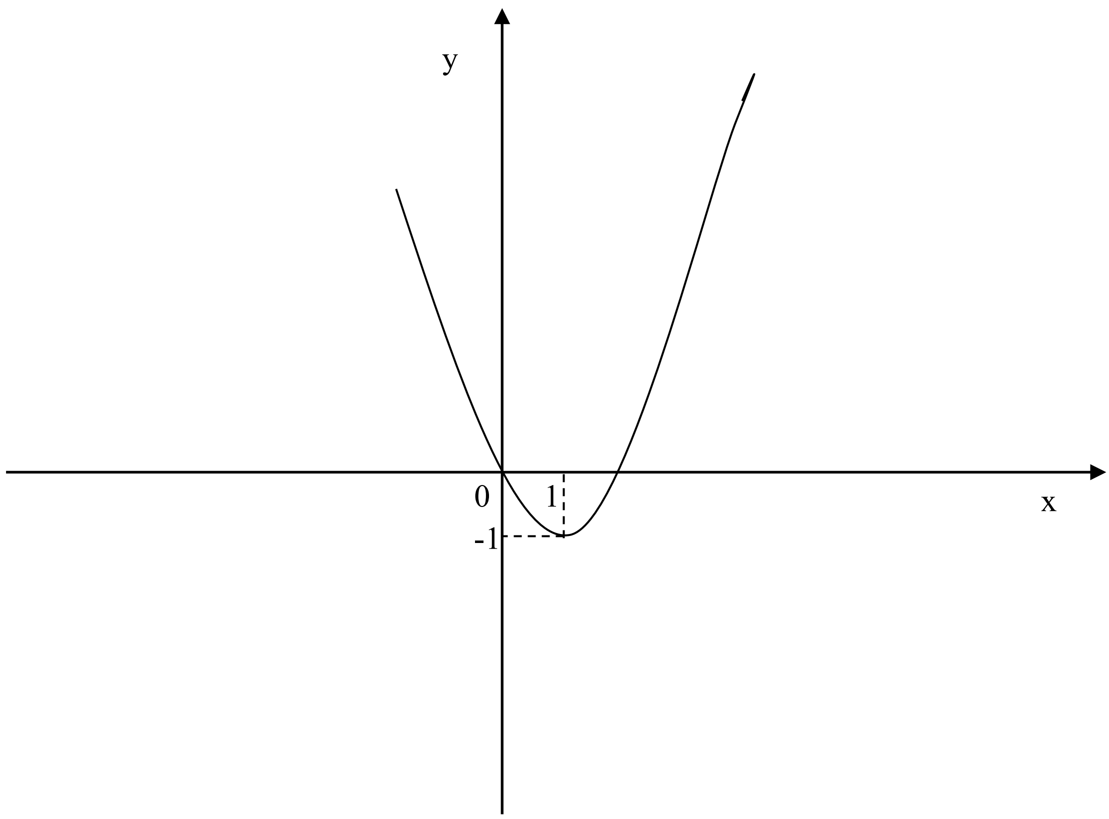
$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^2-2x = \lim_{x \to +\infty} x(1-2/x) \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^2-2x = \lim_{x \to -\infty} x(1-2/x) \longrightarrow -\infty$$

* **Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

* **Représentation graphique**



**2) a) Composantes et module du vecteur vitesse dans le système de coordonnées cartésiennes :**

*** Composantes de** $\vec{v}$ **:**

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2 - 4t) = 8t - 4$$

*** Module de** $\vec{v}$ **:**

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + (8t-4)^2} = \sqrt{4 + 64t^2 - 64t + 16} = \sqrt{64t^2 - 64t + 20} = 2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}$$

**a) Composantes et module du vecteur accélération dans le système de coordonnées cartésiennes :**

*** Composantes de** $\vec{a}$ **:**

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0 \qquad \text{et} \qquad a_y = \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}(8t-4) = 8$$

*** Module de** $\vec{a}$ **:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$$

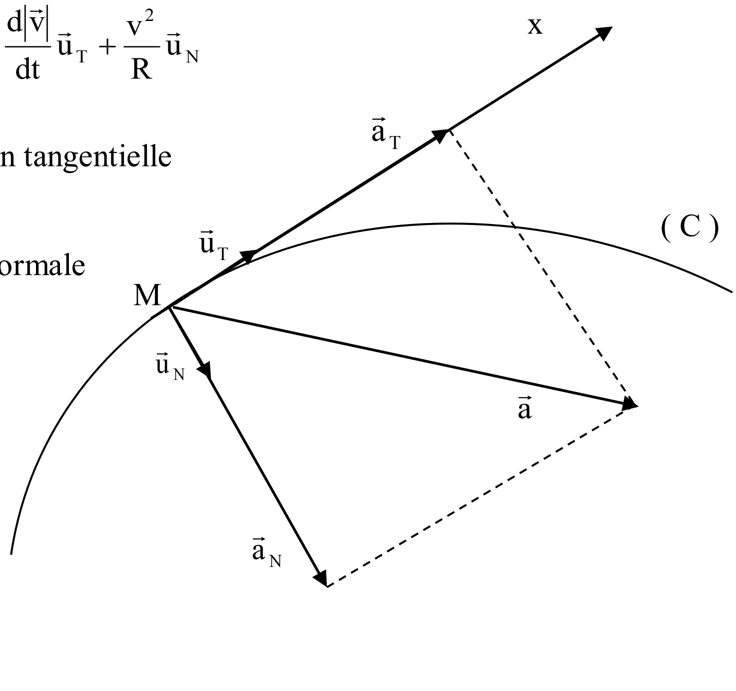
**3)a) Vecteur accélération dans le système de coordonnées intrinsèques (repère de Frenet) :**

Dans le système de coordonnées intrinsèques :

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

Avec, $a_T = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$ l'accélération tangentielle

et $a_N = \dfrac{v^2}{R}$ l'accélération normale



**b) Accélération tangentielle :**

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt} 2\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{-\frac{1}{2}}(32t - 16) = \frac{32t - 16}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}$$

**c) Accélération normale :**

On a : $a^2 = a_T^2 + a_N^2$

$$\Longrightarrow \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{32t - 16}{16t^2 - 16t + 5}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{1024t^2 - 1024t + 256}{16t^2 - 16t + 5}}$$

$$= \sqrt{\frac{1024t^2 - 1024t + 320 - 1024t^2 + 1024t - 256}{16t^2 - 16t + 5}} = \sqrt{\frac{64}{16t^2 - 16t + 5}} = \frac{8}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}$$

**4) Rayon de courbure de la trajectoire :**

On a : $a_N = \dfrac{v^2}{R}$

$$\Longrightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\left(2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}\right)^2}{\dfrac{8}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}}$$

$$= \frac{4(16t^2 - 16t + 5)\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}{8} = \frac{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

## Exercice 3 :

**1) Equation de la trajectoire du point M :**

Les équations de mouvement du point M sont :

$$\begin{cases} x = 2 + \cos t & \Longrightarrow \quad x - 2 = \cos t \\ y = 3 - \sin t & \Longrightarrow \quad y - 3 = -\sin t \end{cases}$$

En élevant au carré et en sommant ces deux relations, on obtient :

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\Longrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

On déduit que la trajectoire est un cercle de rayon 1 et ayant un centre situé à x=2 et y=3

**2) a) Vecteur position dans le système de coordonnées cartésiennes :**

Le point matériel M est en mouvement sur le plan 0xy ; par suite, l'expression du vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (2 + \cos t)\vec{i} + (3 - \sin \theta)\vec{j}$$

**b) Vecteur vitesse et son module dans le système de coordonnées cartésiennes :**

*** Vecteur vitesse :**

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(2+\cos t) = -\sin t \\[2ex] v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3-\sin t) = -\cos t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = -\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$$

*** Module de** $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

**c) Vecteur accélération et son module dans le système de coordonnées cartésiennes :**

*** Vecteur accélération :**

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-\sin t) = -\cos t \\[2ex] a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-\cos t) = -\sin t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

*** Module de** $\vec{a}$ **:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

**3) a) Vecteur accélération dans le système de coordonnées intrinsèques :**

Dans le système de coordonnées intrinsèques, le vecteur accélération s'écrit comme la somme de deux composantes (tangentielle et normale), soit :

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

Soit, $a_T = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$ et $a_N = \dfrac{v^2}{R}$

**b) Accélération tangentielle :**

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}(1) = 0$$

**c) Accélération normale :**

On a : $a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Longrightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{1^2 - 0^2} = 1$

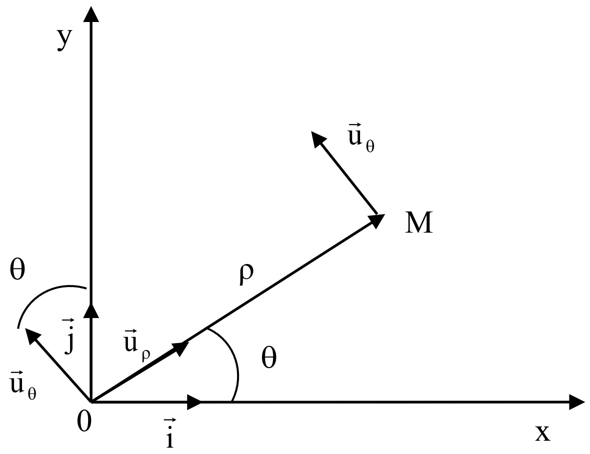
**4) Rayon de courbure de la trajectoire :**

On a : $a_N = \dfrac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{(1)^2}{1} = 1$

## Exercice 4

**1) a) Composantes et module du vecteur vitesse dans le système de coordonnées polaires :**

*** Composantes de $\vec{v}$ :**




On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{u}_\rho) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

Or, $\vec{u}_\rho = \vec{u}_{\rho x} + \vec{u}_{\rho y} = |\vec{u}_{\rho x}|\vec{i} + |\vec{u}_{\rho y}|\vec{j} = |\vec{u}_\rho|\cos\theta\vec{i} + |\vec{u}_\rho|\sin\theta\vec{j} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, car $|\vec{u}_\rho| = 1$

Et, $\vec{u}_\theta = \vec{u}_{\theta x} + \vec{u}_{\theta y} = |\vec{u}_{\theta x}|(-\vec{i}) + |\vec{u}_{\theta y}|\vec{j} = -|\vec{u}_\theta|\sin\theta\vec{i} + |\vec{u}_\theta|\cos\theta\vec{j} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$, car $|\vec{u}_\theta| = 1$

Donc, $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{j} = \dfrac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

Et, $\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = -\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{i} - \sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{j} = -\dfrac{d\theta}{dt}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho$

En remplaçant $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ par son expression dans celle de $\vec{v}$, on obtient :

$$\vec{v}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta=v_\rho\vec{u}_\rho+v_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} v_\rho=\dfrac{d\rho}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(ae^{-\theta}\right)=ae^{-\theta}\dfrac{d(-\theta)}{dt}=-a\omega e^{-\theta} \\ v_\theta=\rho\dfrac{d\theta}{dt}=ae^{-\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=a\omega e^{-\theta}\end{cases}$$

* **Module de** $\vec{v}$ **:**

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_\rho^2+v_\theta^2}=\sqrt{\left(-a\omega e^{-\theta}\right)^2+\left(a\omega e^{-\theta}\right)^2}=\sqrt{2a^2\omega^2e^{-2\theta}}=\sqrt{2}a\omega e^{-\theta}$$

**b) Composantes et module du vecteur accélération dans le système de coordonnées polaires :**

* **Composantes de** $\vec{a}$ **:**

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)=\frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta+\rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$=\frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_\rho$$

$$\Longrightarrow\quad \vec{a}=\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_\rho+\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{u}_\theta=a_\rho\vec{u}_\rho+a_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} a_\rho=\dfrac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\dfrac{d^2}{dt^2}\left(ae^{-\theta}\right)-ae^{-\theta}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=a\omega^2e^{-\theta}-a\omega^2e^{-\theta}=0 \\ a_\theta=\rho\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}=\rho\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+2\dfrac{d}{dt}\left(ae^{-\theta}\right)\dfrac{d\theta}{dt}=0+2a(-\omega)e^{-\theta}\omega=-2a\omega^2e^{-\theta}\end{cases}$$

* **Module de** $\vec{a}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_\rho^2+a_\theta^2}=\sqrt{0^2+\left(-2a\omega^2e^{-\theta}\right)^2}=\sqrt{4a^2\omega^4e^{-2\theta}}=2a\omega^2e^{-\theta}$$

**2) Expressions des composantes tangentielle et normale :**

Dans le système de coordonnées intrinsèques, l'expression de l'accélération s'écrit :

$$\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N=a_T\vec{u}_T+a_N\vec{u}_N=\frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_T+\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

Soit, $a_T=\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$ et $a_N=\dfrac{v^2}{R}$

**a) Accélération tangentielle :**

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}a\omega e^{-\theta}\right) = -\sqrt{2}a\omega^2 e^{-\theta}$$

**b) Accélération normale :**

On a : $a^2 = a_T^2 + a_N^2$

$$\Longrightarrow \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\left(2a\omega^2 e^{-\theta}\right)^2 - \left(-\sqrt{2}a\omega^2 e^{-\theta}\right)^2} = \sqrt{2a^2\omega^4 e^{-2\theta}} = \sqrt{2}a\omega^2 e^{-\theta}$$

**3) Rayon de courbure de la trajectoire :**

On a : $a_N = \dfrac{v^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{\left(\sqrt{2}a\omega e^{-\theta}\right)^2}{\sqrt{2}a\omega^2 e^{-\theta}} = \dfrac{2a^2\omega^{2^{-2\theta}}}{\sqrt{2}a\omega^2 e^{-\theta}} = \sqrt{2}ae^{-\theta}$