

Exo 1: Calculer les limites suivantes en utilisant le D.L.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x e^n - \ln(1+n)}{\sin n - \ln(1+\sin n)}$$

Exo 2: Donner le développement limité d'ordre 5 des fonctions suivantes : $\frac{1}{1+x^2}$, avec $\sin 3x$ d'ordre 6.

Exo 3: Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi * par : $\forall a, b \quad a * b = a + b - ab$

Exo 4: Montrer que * est commutative et associative.

Exo 5: Montrer que * possède un élément neutre.

Exo 6: Montrer que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, + est l'addition dans $\mathbb{R}$ et $\cdot$ est la multiplication.

Exo 7: Algèbre linéaire
Montrer que les applications f, g, h définies comme suit :

$$f(m) = \text{Id}_{\mathbb{R}}; \quad g(m) = \sin x, \quad h(x) = \cos x$$

sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exo 8: Soit dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u(-1, 2, 0)$; $v = (3, -5, -1)$, $w = (0, 1, -2)$.

Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exo 9: Que les sont dans cette base, les coordonnées de $(1, -2, 1)$?

Exo 10: Soit H un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, défini par :

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

Exo 11: Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$;

Exo 12: Déterminer la dimension de H ;

Exo 13: Calculer le complémentaire de H dans $\mathbb{R}^3$.

Solution de la série n° 3

P1

Soit: avec le développement limite on va calculer limite

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^2} = 0/0$; on a $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ D.L à l'ordre 2
 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ D.L à l'ordre 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \ln(1+x)}{\sin x - \ln(1+\sin x)}$

$x e^x \approx x [1 + x + o(x)] = x + x^2 + o(x^2)$
 $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
 $\sin x \approx x + o(x^2)$
 $\ln(1+\sin x) \approx \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(x^2)$

on aura $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \ln(1+x)}{\sin x - \ln(1+\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - (x - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x - (x - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} x^2}{\frac{x^2}{2}} = 3$$

ii) développer les fonctions suivantes jusqu'à l'ordre 5.

i) $\frac{1}{1+x^2}$ on sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$.

donc $\frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + (-x^2)^2 + o(x^5) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$

ii) on a d'après le cours $\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$

$\Rightarrow \arcsin 3x \approx 3x + \frac{27}{6} x^3 + \frac{3^5}{40} x^5 + o(x^5)$

$\Rightarrow \arcsin 3x \approx 3x + \frac{27}{6} x^3 + \frac{243}{40} x^5 + o(x^5)$

on développe la fonction $\frac{shx-x}{x^3}$ à l'ordre 6 [82]
 on voit que $shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + O(x^{2p+1})$ fonction paire

donc ici on doit développer shx jusqu'à l'ordre 9 puis on fait

la division par x^3 .
 $shx \approx x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + O(x^9)$

$$\Rightarrow \frac{shx-x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + O(x^9)}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + O(x^6)$$

Exo 2: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a * b = a + b - a.b$
 $*$ est commutative

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a: $a * b = a + b - a.b = b + a - b.a = b * a$

$\Rightarrow *$ est commutative
 • associative: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a * (b * c) = (a * b) * c$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) - a.(b * c) = a + (b + c - b.c) - a(b + c - b.c) \\ &= a + b + c - b.c - a.b - a.c + a.b.c \dots I \\ (a * b) * c &= (a + b - a.b) * c = a + b - a.b + c - (a + b - a.b).c \\ &= a + b + c - a.b - a.c - b.c + a.b.c \dots II \end{aligned}$$

$I = II \Rightarrow *$ est associative.

x possède un élément neutre $\Rightarrow x + e - a.e = x$

$$\exists e \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} \quad a * e = e * a = a \Rightarrow e = 0, \text{ pour } a \neq 1.$$

$$\Rightarrow e - a.e = 0 \Rightarrow e(1-a) = 0 \Rightarrow e = 0, \text{ pour } a \neq 1.$$

Exo 3: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif d'après 8 cours

Indication
 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps et seulement si: $(\mathbb{R}, +)$ un groupe commutatif

o) Ensemble $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un anneau $\Leftrightarrow$

il vérifie les conditions suivantes:
 associative $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a+b)+c = a+(b+c)$ car c'est vrai
 $\Rightarrow$ l'addition est associative.

élément neutre: $\forall a \in \mathbb{R} \exists e \in \mathbb{R} \quad a + e = e + a = a \Rightarrow e = 0$

l'élément symétrique : $\forall a \in R : a + a' = a' + a = 0 \Rightarrow a' = -a$ P3

R muni de la loi $+$ est un groupe additif car $a + b = b + a$

c'est un groupe commutatif.

b) la 2nd opération est associative et distributive pour la première.

car $\forall a, b, c \in R (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ c'est vraie.

car $a \cdot (b + c) = ab + ac$ ça c'est vraie.

$(R, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, si la seconde opération est commutative car $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$.

Unitaire si 2nd opération admet un élément neutre car

car $\forall a \in R, \exists e' \neq 0, a \cdot e' = e' \cdot a = a \Rightarrow e' = 1$ pour $a \neq 0$.

donc $(R, +, \cdot)$ est un anneau unitaire.

l'élément de R^* est inversible car $\forall a \in R^* a \cdot a' = a' \cdot a = 1$
 $\Rightarrow a' = \frac{1}{a}$
 c'est symétrique de a .

si $(R^*, \cdot)$ est un groupe commutatif alors $(R, +, \cdot)$ est dit un corps commutatif.

on vérifie facilement que $(R^*, \cdot)$; $R^* = R \setminus \{0\}$ muni de la loi multiplication est un groupe commutatif.

$(R^*, \cdot)$ groupe commutatif si : $\forall a, b, c \in R^* a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ car
 ("." est associative)
 $a \cdot e = e \cdot a = a \Rightarrow e = 1$

"." admet un élément neutre : car
 $\forall a \in R^*; a \cdot a' = a' \cdot a = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a}$

la loi est commutative car
 $\Rightarrow (R, \cdot)$ est un groupe abélien.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Semestre 2 à partir de l'exo 4.

Exo 1: Soit g la fonction définie par:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} & \text{pour } x \neq 0 \\ 3\alpha - 2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α , g est continue au pt 0.

Exo 2: Calculer la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$; 2) $g(x) = \frac{3^x}{3}$; 3) $h(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{1 - e^{-x}}$

4) $h(x) = \arcsin \sqrt{3x}$ 5) $sh(x^3 + 1)$ 6) $u(x) = Ch \sqrt{x}$.

Exo 3: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 2 \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \arctan x$$

1) calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ 2) calculer $f(0)$ en déduire que

$$f(x) = \frac{\pi}{2}; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exo 4: Calculer la dérivée d'ordre n pour les fonctions suivantes:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ telles que : } f(x) = e^{-2x}; g(x) = x e^x$$

Exo 5: Calculer les limites suivantes à l'aide de la règle de l'Hôpital ou autre.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}; \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}.$$

Exo 6: Montrer que 1) $sh 2x = 2 sh x ch x$

2) $Th 2x = \frac{2 th x}{1 + th^2 x}$ avec $th x = \frac{sh x}{ch x}$.

Solution de l'exercice
n° 2

2.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} & \text{pour } x \neq 0 \\ 3d - 2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$g(x)$ est continue au point 0 ($\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$)

Donc pour $x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{x-1}{x+1}$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - (-x)}{x^2 + (-x)} = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{x+1}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = -1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+1} = -1 = g(0)$

$\Rightarrow 3d - 2 = g(0) = -1 \Rightarrow 3d - 2 = -1 \Rightarrow 3d = -1 + 2 = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

Exo 2: 1) $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$

2) $g(x) = \frac{3^x}{3} \Rightarrow g(x) = e^{3x \ln 3}$

$\Rightarrow g(x) = e^{3 \ln 3 x} \Rightarrow g'(x) = 3 \ln 3 e^{3 \ln 3 x} = 3 \ln 3 \cdot 3^x = \ln 3 \cdot 3^{1+x}$

3) $h(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 - e^x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-\sin x + e^x \sin x - 2e^x \cos x}{2\sqrt{\cos x} (1 - e^x)^2}$

4) $L(x) = \arcsin \sqrt{3x} \Rightarrow L'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{3x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} = \frac{1}{2\sqrt{3x}(1 - 3x)}$

5) $K(x) = [\operatorname{sh}(x^3 + 1)]' \Rightarrow K'(x) = 3x^2 \operatorname{ch}(x^3 + 1)$

6) $u(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x}$

$[\operatorname{arctg} 2x]' = \frac{2x'}{1 + (2x)^2} = \frac{2}{1 + 4x^2}$

$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1 + x^2}$

Exo 3: $f(x) = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{1}{1 + x^2}$
 $\Rightarrow f'(x) = 2 (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + 1} - x))' + \frac{1}{1 + x^2}$
 On va calculer la dérivée de $(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + 1} - x))'$
 $[\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + 1} - x)]' = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)'}{1 + (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2}$

$$\text{On a } (\sqrt{x^2+1} - x)' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \quad (P_2)$$

$$\Rightarrow (\arctg(\sqrt{x^2+1} - x))' = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{1}{2 + 2x^2 - 2x\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \left[\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{(2+2x^2)\sqrt{x^2+1} - 2x(x^2+1)} \right] + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2(x^2+1)} \left[\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} - x} \right] + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{constante } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 2 \arctg(\sqrt{1} - 0) + \arctg 0 = 2 \arctg 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex 4: la dérivée nième ou bien d'ordre

$$f(x) = e^{-2x}; f'(x) = -2e^{-2x}, f''(x) = 4e^{-2x}, f'''(x) = -6e^{-2x}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^n e^{-2x}; f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} 2^{n+1} e^{-2x}$$

donc on suppose que $P(n)$ est vraie $\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

$$P(n+1): [f^{(n)}(x)]' = [(-1)^n 2^n e^{-2x}]' = -2(-1)^n 2^n e^{-2x} = (-1)^{n+1} 2^{n+1} e^{-2x}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^n e^{-2x}$$

$$2) g(x) = x e^x \Rightarrow g'(x) = e^x + x e^x = (1+x)e^x$$

$$g''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x; g'''(x) = (2+x)e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$$

$$\dots g^{(n)}(x) = (n+x)e^x$$

on suppose que $P(n)$ est vraie $\Rightarrow P(n+1)$ est vraie

$$P(n): n=1 (x e^x)' = (1+x)e^x \text{ vraie}$$

$$P(n+1): [g^{(n)}(x)]' = [(n+x)e^x]' = e^x + (n+x)e^x = (n+1+x)e^x$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } g^{(n)}(x) = (n+x)e^x$$

Exos $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{3n} - 1}{n} = \frac{0}{0}$ F.I. on pose $f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$ (3)
 $f(0) = 1 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot e^0 = 3$

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{3n} - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = f'(0)$ (d'après la définition de la dérivabilité d'une fonction en un pt)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{3n} - 1}{n} = 3$

2/ $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{0}{0}$ F.I. on fait la division euclidienne manuellement

$$\begin{array}{r} x^3 - 8 \quad | \quad x + 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \quad | \quad x^2 + 2x + 4 \\ \hline 2x^2 - 8 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline -8 + 4x \\ -(4x - 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

Donc $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)} = \lim_{n \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

3/ $\lim_{n \rightarrow 0} n \sin \frac{1}{n}$ avec un théorème $\left\{ \begin{array}{l} \text{on a } f(n) = g(n) \cdot h(n) \\ \text{si } \lim_{n \rightarrow n_0} g(n) = 0 \\ \text{et } h(n) \text{ est bornée} \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow n_0} f(n) = 0 \end{array} \right.$

ici $g(n) = n$; $h(n) = \sin \frac{1}{n}$

donc $\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = \lim_{n \rightarrow 0} n = 0$

et $h(n) = \sin \frac{1}{n}$ est bornée car $|h(n)| \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} n \sin \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan 5n}{n}$ avec l'Hôpital : $f = \frac{g}{h}$ $\begin{cases} h(n) = n \\ g(n) = \tan 5n \end{cases}$

$\frac{\tan 5n}{n} = \frac{g}{h}$

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan 5n}{n} = \frac{0}{0}$ F.I. avec la méthode de l'Hôpital on aura $h'(n) = (n)' = 1$

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan 5n}{n} = \left[\frac{g'(n)}{h'(n)} \right]_{n=0} = \left[(\tan 5n)' \right]_{n=0}$ $(\tan 5n)' = 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 5n} = 5$
 $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{g'(n)}{h'(n)} = \left[\frac{5}{\cos^2 5n} \right]_{n=0} = \frac{5}{1} = 5$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan 5n}{n} = 5$

Montrer que
Prop: $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(84)

on a $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

et $2 \sinh x \cosh x = 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{2x} - e^{x-x} + e^{-x+x} - e^{-2x} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{2x} - e^0 + e^0 - e^{-2x} \right] = \sinh 2x$$

Cqfd.

$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$ on a $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$; $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$

$$\Rightarrow \tanh 2x = \tanh(x+x) = \frac{\tanh x + \tanh x}{1 + \tanh x \cdot \tanh x} = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

d'autre part on a $\tanh 2x = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x} = \frac{2 \cosh x \sinh x}{\cosh^2 x + \sinh^2 x}$

$$\Rightarrow \tanh 2x = \frac{\cancel{\cosh^2 x} \left[\frac{2 \sinh x}{\cosh x} \right]}{\cosh^2 x \left[1 + \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \right]} \Rightarrow \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \text{ car } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Cqfd.