

2) Raisonnement par l'absurde (c'est un supp que pour $P \Rightarrow Q$) [82]

Preuve et que Q est fautive et on arrive à contradiction
 $\forall a, b \geq 0 \quad \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et que $a \neq b$

$\Rightarrow a(1+a) = (1+b)b \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b \Rightarrow a^2 - b^2 = b - a = -(a-b)$
 on divise par $a-b \Rightarrow a+b = -1$ c'est une contradiction car on a supposé au départ que $a, b \geq 0$. donc on a $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$

a supposé au départ que $a, b \geq 0$. donc on a $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$
 on pose $f(a) = a^2$ et $g(a) = -a$

3) Raisonnement par l'absurde Contre exemple on pose $f(a) = a^2$ et $g(a) = -a$
 on dit $f(a) = a^2 = +\infty$ $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$
 $\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) = -\infty$

$\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) = -\infty$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$

$a \rightarrow +\infty \quad X = Y \Leftrightarrow \begin{matrix} X \subseteq Y \\ Y \subseteq X \end{matrix}$ on voit que $\begin{cases} x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X \\ \text{et} \\ x \in Y \end{cases}$

Ex03: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 de la même façon on démontre l'autre sens. c'est on montre que
 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$X \cap (X \cup Y) = X$ $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$ $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$
 et $X \cup (X \cap Y) = X$ $X \cup (X \cap Y) \subseteq X$ $X \subseteq X \cup (X \cap Y)$



on voit que $X \subseteq (X \cup Y) \Rightarrow X \cap (X \cup Y) = X$
 $X \cap Y \subseteq X \Rightarrow (X \cap Y) \cup X = X$
 $\Rightarrow X \cap (X \cup Y) = X \cup (X \cap Y)$
 $\Rightarrow (X \cap X) \cup (X \cap Y) = X \cup (X \cap Y)$. c'est la même ensemble.

Ex04: montrer que R est une relation d'ordre
 $(m, n) R (n', y') \Leftrightarrow m \leq n' \text{ et } y \leq y'$

- 1) réflexive $\Rightarrow y(n, y) \in \mathbb{R}^2$
- 2) transitive $x(n, y), (n', y'), (n'', y'')$
 $(m, y) R (n', y') \text{ et } (n', y') R (n'', y'')$
 $\Rightarrow (m, y) R (n'', y'')$ on vérifie

Rest transitive car $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$
 $(x', y') R (x'', y'') \Leftrightarrow x' \leq x'' \text{ et } y' \leq y''$ [P3]

$$\Rightarrow x \leq x' \leq x'' \Rightarrow x \leq x'' \\ \text{et } y \leq y' \leq y'' \Rightarrow y \leq y'' \Rightarrow (x, y) R (x'', y'')$$

$\Rightarrow$ la relation est transitive

Antisymétrique $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$ ^{Antisymétrie}
 $(x', y') R (x, y) \Leftrightarrow x' \leq x \text{ et } y' \leq y$ ^{(x', y') n'est en relation avec (x, y)}

Voire uniquement ad $x = x'$ et $y = y'$. On dit que la relation

R est une relation d'ordre partiel.

b) $x R y \Leftrightarrow x e^y = y e^x$ est une relation d'équivalence

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall x, x R x \Leftrightarrow x e^x = x e^x$

Symétrique $x, y \in \mathbb{R}, x R y \Leftrightarrow x e^y = y e^x \Rightarrow y e^x = x e^y$

$\Rightarrow y R x \Rightarrow$ symétrique.

Transitive Soient $x, y, z \in \mathbb{R}, x R y \text{ et } y R z$

$$x R y \Rightarrow x e^y = y e^x \text{ et } y R z \Rightarrow y e^z = z e^y$$

$$x e^y = y e^x \text{ et } y e^z = z e^y \Rightarrow \frac{e^y}{y} = \frac{e^z}{z} \Rightarrow \frac{z}{e^z} = \frac{y}{e^y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{z}{e^z} \Rightarrow x e^z = z e^x \Rightarrow x R z$$

$\Rightarrow R$ est transitive

ou bien par la méthode suivante (voir page 4)

Calculons les classes d'équivalence pour la relation R .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{C}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R} / x R y \right\} \\ = \left\{ y \in \mathbb{R} / x e^y = y e^x \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} / \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y} \right\}$$

on pose la fonction $f(t) = \frac{t}{e^t}$

R est transitive $x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$

(84)

$$x R y \Rightarrow x e^y = y e^x \text{ et } y R z \Rightarrow y e^z = z e^y$$

$$\text{calculons } x y e^z = x (y e^z) = x z e^y \quad (\text{car } y R z) \\ = z y e^x \quad (y \text{ est en relation avec } z)$$

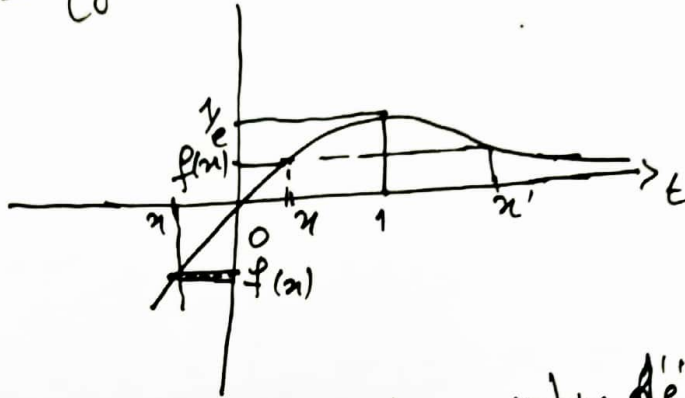
$$\text{si } y \neq 0 \text{ donc on divise par } y \Rightarrow \frac{x y e^z}{y} = \frac{z y e^x}{y} \Rightarrow$$

$$x e^z = z e^x \Rightarrow x R z$$

$$\text{si } y = 0 \quad x e^y = y e^x \Rightarrow x e^0 = 0 e^x \Rightarrow x = 0 \text{ et } z = 0 \Rightarrow x R z$$

$\Rightarrow R$ est une relation d'équivalence

$$\varphi(x) = \{ y \in \mathbb{R} \mid x R y \} \quad \text{on pose } t \mapsto f(t) = \frac{t}{e^t} \\ = \{ y \in \mathbb{R} \mid x e^y = y e^x \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y} \}$$



Cardinal de $\varphi(x)$ veut dire nombre d'élément d'un ensemble

$$\text{si } x > 0 \Rightarrow f(x) \in]0, \frac{1}{e}] \Rightarrow \text{Card } \varphi(x) = 2.$$

$$\text{si } x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \varphi(x) = \{x\} \Rightarrow \text{Card } \varphi(x) = 1.$$

Ex 05: Soit f une app définie de $\mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-5}$$

f est bijective?

f est injective?

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{5\} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$\frac{2x_1-3}{x_1-5} = \frac{2x_2-3}{x_2-5} \Rightarrow (2x_1-3)(x_2-5) = (2x_2-3)(x_1-5) \\ \Rightarrow 2x_1x_2 - 10x_1 - 3x_2 + 15 = 2x_2x_1 - 10x_2 - 3x_1 + 15$$

$$\Rightarrow -10x_1 + 3x_1 = -10x_2 + 3x_2 \Rightarrow -7x_1 = -7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

donc f est injective

Est surjective?

(25)

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} : y = f(x)$$

$$\text{on a } y = \frac{2x-3}{x-5} \Rightarrow (x-5)y = 2x-3$$

$$xy - 2x = -3 + 5y \Rightarrow x(y-2) = -3 + 5y$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3+5y}{y-2}$$

(f surjective) $\Rightarrow f$ est bijective

x est la fonction réciproque $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3+5x}{x-2}$

$$\forall x, f^{-1}(x) \circ f(x) = \text{Id} \quad (f \circ f^{-1})(x) = \text{Id} = x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

$$i) f \circ g = x^2 + 1 ; g \circ f = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$