Département de mines

1ière Année licence

Année 2020/2021

Série n° 1
Mathématiques
Semestre 1

Exo1 : Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

1/ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$;

2/ $\sum_{p=1}^{n} p.p! = (n+1)! - 1$.

Exo2 : 1/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $|x-1| \leq x^2 - x + 1$,

2/ Montrer que $\forall a, b \geq 0$ si on a $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$

3/ Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que :

$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$, peut-on conclure que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$?

Exo3 : Soient A, B, C des ensembles, montrer que 1/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2/ Soient X et Y deux ensembles, comparer $X \cap (X \cup Y)$ et $X \cup (X \cap Y)$.

Exo4 : a) Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$

montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

b) Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x e^y = y e^x$

montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exo5 : Soit f une application définie de $\mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$f(x) = \frac{2x-3}{x-5}$

1/ Montrer que f est bijective et donner la valeur de l'application réciproque.

2/ Soient f et g deux applications définies comme suit :

$f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.