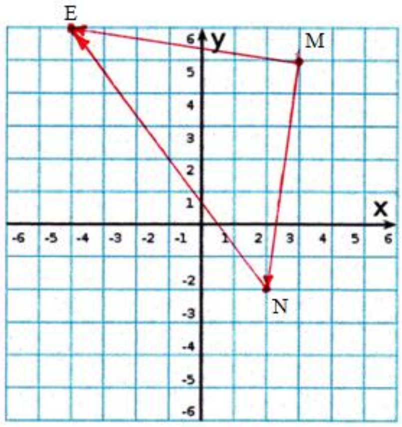
Université Badji Mokhtar
Département de Géologie
Première année LMD
Année 2020/2021
Physique 1

Solution de la série 2
(Calcul Vectoriel)

Exercice 1 : Traité en présentiel ;

Exercice 2 :

1)



2) On a:

$$\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} x_E - x_M \\ y_E - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-3 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$En\ utilisant\ la\ méthode\ ci-dessus\ on\ trouve: \ \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NE}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs peuvent s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{ME} = -7\vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad , \quad \overrightarrow{MN} = -\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} \ , \quad \overrightarrow{NE} = -6\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$$

3) Valeur des distance ME, MN et NE :

$$La\ distance \quad ME = \left|\overrightarrow{ME}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} = \sqrt{50}$$

$$La\ distance \quad MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}$$

$$La\ distance \quad NE = \left|\overrightarrow{NE}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

4) On a :

$$ME^2 + MN^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{50})^2 = 100 = NE^2$$

Soit $ME^2 + MN^2 = NE^2$;

Le théorème de Pythagore est vérifié , donc le triangle MEN est rectangle en M.

De plus $ME = MN = \sqrt{50}$ *, donc le triangle est rectangle et isocèle.*

<u>Exercice 3</u> : On a les vecteurs suivant (voir la série 2) :

$$\overrightarrow{V_1}, \quad \overrightarrow{V_2}, \qquad et \quad \overrightarrow{V_3}$$

1) $\overrightarrow{V_2}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{V_1}$ donc $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

On a une équation du second degré pour laquelle le discriminant $\Delta=0$
Ce qui permet d'obtenir $\alpha = 1$

2)

Pour $\alpha = 3$ on a : $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'angle $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ entre $\overrightarrow{V_1}$ *et* $\overrightarrow{V_2}$ est déterminé par le produit scalaire :

$$de \quad \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}|.|\overrightarrow{V_2}| \cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$$

$$\text{on obtient } \cos(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \frac{\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}}{|\overrightarrow{V_1}|.|\overrightarrow{V_2}|} = \frac{9-6-1}{\sqrt{19}.\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{19}.\sqrt{14}} = 0{,}245$$

$$l'angle\ (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = 76°$$

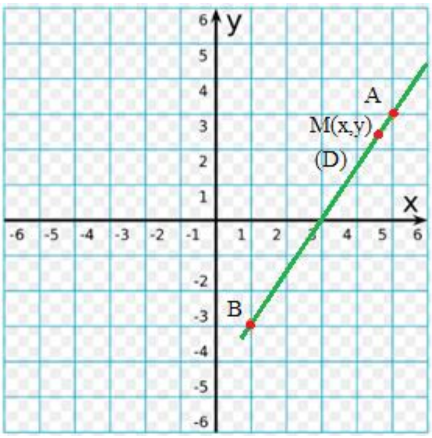
3) Valeurs de α *et* β pour que $\overrightarrow{V_2}$ *soit parallèle* à $\overrightarrow{V_3}$:

Pour cela on fait le produit vectoriel (voir TD1) des vecteurs $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix} 3 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$

On obtient $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (4-\beta)\vec{i} - (2\alpha - 3)\vec{j} \;\; (\alpha\beta - 6)\vec{k}$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} 4 - \beta = 0\ , \quad donc\ \beta = 4 \\ 2\alpha - 3 = 0, \quad donc \quad \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta - 6 = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice 4</u> : Equation de la droite (D) qui passe par A et B (voir la série 2)



Soit M(x,y) un point de la droite (D) donc $\overrightarrow{BM}$ est parallèle à $\overrightarrow{BA}$

Donc $\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{BA} = 0$; on a $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{BA} = (0-0)\vec{\imath} - (0-0)\vec{\jmath} + [(6)(x-1) - (4)(y+3)]\vec{k} = (6x - 4y - 18)\vec{k}$$

Donc $6x - 4y - 18 = 0$ *ou bien* $3x - 2y - 9 = 0$

L'équation de la droite (D) est : $3x - 2y - 9 = 0$

1) Equation du plan (P) qui passe par A, B et C (voir la série 2)
   Soit $M(x, y, z)$ *un point du plan* (P) *donc* $\overrightarrow{AM}$ *est perpendiculaire* à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   Donc $\overrightarrow{AM} . (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$
   Pour cela on détermine les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AM}$.
   on trouve:

   $\overrightarrow{AB} = 0\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\overrightarrow{AM} = (x-1)\vec{\imath} + (y-3)\vec{\jmath} + (z-4)\vec{k}$
   - Le calcul de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ *donne*: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -9\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} - 3\vec{k}$
   - Le calcul de $\overrightarrow{AM} . \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$ *donne* :
   - $\left[(x-1)\vec{\imath} + (y-3)\vec{\jmath} + (z-4)\vec{k}\,\right].[-9\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} - 3\vec{k}\,] = 0$

   En effectuant l'opération ci-dessus on obtient l'équation du plan comme suite :
   $$-9x + 15y - 3z - 24 = 0$$
   $$\textit{ou bien}: \quad -3x + 5y - z - 8 = 0$$

<u>Exercice 5</u> :

$$\vec{v} = \cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$$

$$\textit{avec} \quad \theta = \omega t \textit{ donc } \theta \textit{ varie avec le temps, donc le vecteur } \vec{v} \textit{ tourne}$$

$$\text{donc:} \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \omega$$

1) $|\,\vec{v}\,| = \sqrt{(\cos(\theta))^2 + \left(\sin(\theta)\right)^2} = 1$

2) $\overrightarrow{v_1} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}}$ *et* $\overrightarrow{v_2} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\vec{v}\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta\ \mathrm{dt}} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}$$

- $\overrightarrow{v_2} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{d(\cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath})}{\mathrm{d}\theta}$

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$$

- $\overrightarrow{v_1} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \omega\frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}$; comme $\overrightarrow{v_2} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}$ on peut écrire $\overrightarrow{v_1} = \omega\overrightarrow{v_2}$

Donc $\overrightarrow{v_1} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \omega\frac{d(\cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath})}{\mathrm{d}\theta}$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \omega[-\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}] = -\omega\sin(\theta)\vec{\imath} + \omega\cos(\theta)\vec{\jmath}$$

$$\textit{donc on a}: \quad \overrightarrow{v_1} = \omega\overrightarrow{v_2}$$

4)

* Pour montrer que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires (parallèles) il fut montre que le produit vectoriel est nul(=0). On a :

$$\overrightarrow{v_1} = -\omega\sin(\theta)\vec{\imath} + \omega\cos(\theta)\vec{\jmath} = -\omega\sin(\theta)\vec{\imath} + \omega\cos(\theta)\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_2} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

On calcule $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = (0)\vec{\imath} - (0)\vec{\jmath} + [-\omega\sin(\theta)\cos(\theta) + \omega\cos(\theta)\sin(\theta)]\vec{k} = 0$

On obtient : $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = 0$ donc $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont parallèles

* Pour montrer que $\overrightarrow{v_2}$ et $\vec{v}$ $sont\ perpendiculaires\ il\ faut\ montrer\ que$

$$le\ produit\ scalaire\quad \overrightarrow{v_2}\,.\,\vec{v} = 0$$

On a : $\vec{v} = \cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$

et : $\overrightarrow{v_2} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$

on obtient $\overrightarrow{v_2}\,.\,\vec{v} = -\sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) = 0$

$\overrightarrow{v_2}\,.\,\vec{v} = 0$, donc $\overrightarrow{v_2}$ et $\vec{v}$ $sont\ perpendiculaires$

5) Représentation graphique (pour le graphe on a pris $\omega = 2$ rad/s).