TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce polycopié de cours "Mathématiques 01", enseigné aux étudiants de la première année licence géologie au premier semestre, département de Géologie, traite les différents aspects "analyse" et "algèbre". Il est utile aussi à toute personne souhaitant connaitre et surtout utiliser les principales méthodes.

Ce cours est organisé autour de 05 chapitres. Le premier sera consacré aux Ensembles-applications-Relations ; dans le deuxième et troisième chapitre, on présente les différentes méthodes

suites et séries numériques. Le quatrième chapitre traite les polynômes et les fractions rationnelles. On finit ce cours par les fonctions numériques, dans le chapitre 05.

1

CHAPITRE 2

ENSEMBLES-APPLICATIONS-RELATIONS

1 Ensembles

1.1 Notion d'ensemble

La notion d'ensemble est considérée comme primitive. Retenons que la caractérisation d'un ensemble E doit être nette, c'est-à-dire que, pour tout élément x, on doit pouvoir affirmer ou bien qu'il est dans E $(x \in E)$, ou bien qu'il n'y est pas $(x \notin E)$.

On note $\oslash$ l'ensemble vide, c'est -à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément. E et F étant des ensembles, on dit que E est inclus dans F si, et seulement si, tous les éléments de E appartiennent aussi à F. On note $E \subset F$.

On dit aussi que E est une partie de F, ou que F contient E.

L'ensemble des parties de E se note $P(E)$. Dire que $A \in P(E)$ signifie que $A \subset E$.

1.2 Opérations dans $P(E)$

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de E, on définit :

– Le **complémentaire** de A et dans E : $\overline{A} = \{x \in E; x \notin A\}$;

- L'**intersection** de A et de B : $A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$;
  Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjoints ;
- La **réunion** de A et de B : $A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- Ce "ou" a un sens incusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.
- La **différence** : $A \setminus B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$;

1.3 Propriétés des opérations dans $P(E)$

Pour toutes parties A, B et C et E,on a les propriétés qui suivent.

1. **Complétaire**

$$\overline{E} = \emptyset; \quad \overline{\emptyset} = E; \quad \overline{\overline{A}} = A; \quad si\ A \subset B \quad alors \quad \overline{B} \subset \overline{A}$$

2. **Lois de Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

3. **Réunion**

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A; \quad A \cup \emptyset = A; \quad A \cup E = E$$

4. **Intersection**

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap E = A$$

5. **Réunion et intersection**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.4 Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$et $b \in B$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est

$$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, ..., x_n)\,; x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n\}$$

Si $E_1 = ... = E_n = E$, on le note E^n.

1.5 Nombres réels

Premières propriétés

Corps ordonné On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est :

1. Un **corps** pour dire qu'il est muni de deux opérations $+$ et $\times$, avec toutes les propriétés dont vous avez l'habitude ;
2. Un **corps ordonné** pour dire que la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec $+$ et $\times$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad a \leq b \Longrightarrow a.c \leq b.c$$

Règles de calcul

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k . y^{n-k} \qquad \text{(formule du binôme)}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k-1} . y^k$$

Valeur absolue

– La valeur absolue d'un réel a, notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geq 0\,; \quad |a| = -a \quad \text{si} \quad a \leq 0$$

– **Propriétés** $\forall a \in \mathbb{R} \qquad \forall b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geq 0; |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0; |a.b| = |a| \,.\, |b|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|\,; ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Propriété d'Archimède Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $bk > a$.

Intervalles

Définitions Pour $a \leq b$, le segment $[a, b]$ est définie par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \Longleftrightarrow \exists t \in [0, 1] \quad c = t.a + (1-t)\,.b$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$$]a, b[\,;[a, b[\,;]a, b]\,;]a, +\infty[\,;[a, +\infty[\,;]-\infty, b[\,;]-\infty, b]\,;]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Propriété caractéristique Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in A \qquad a < c < b \Longrightarrow c \in A$$

1.6 Nombres complexes

Forme algébrique

Définitions Tout nombre complexe z s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels, i étant un nombre complexe particulier tel que $i^2 = -1$.

Le réel a s'appelle la partie réelle de z, et se note $\mathrm{Re}\,(z)$.

Le réel b s'appelle la partie imaginaire de z, et se note $\mathrm{Im}\,(z)$.

Si $b = 0$, alors z est réel, d'où $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Si $a = 0$, alors z est un imaginaire pur.

Egalité Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Opérations dans $\mathbb{C}$ Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ par :

$$z + z' = (a + a') + i\,(b + b')\,; \qquad z.z' = (a.a' - b.b') + i\,(a.b' + a'.b)$$

Pour ces deux opérations, $\mathbb{C}$ est un corps.

Conjugué d'un nombre complexe **Définition**

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Image

Les images des nombres complexes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés

$$\overline{\overline{z}} = z; \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \quad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,; \qquad z \text{ est imaginaire pur si et seulement si, } z = -\overline{z}$$

$$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)\,; \qquad z \text{ est réel si,et seulement si, } z = \overline{z}$$

Application au calcul de $\frac{1}{z}$

Comme $z\overline{z} = a^2 + b^2$est réel, on obtient la forme algébrique de $\frac{1}{z}$, ou de $\frac{z_1}{z_2}$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjigué de dénominateur.

Forme trigonométrique

Module d'un nombre complexe Définition

Le module de $z = a + ib$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le nombre réel positif $\sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.On le note $|z|$ (> 0).

Si M est l'affixe de z, $|z|$ est le longueur OM.

Propriétés

Le module d'un nombre complexe a les mêmes propriétés que la valeur absolue d'un nombre réel.

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0; \quad |\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|\,; \qquad |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$$

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|z.z'| = |z|\,.\,|z'|\,; \qquad |z^n| = |z|^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}\,; \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{si } z' \neq 0$$

Forme trigonométrique Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique :

$$z = |z| \, . \left(\cos\theta + i \sin\theta\right)$$

θ est un argument de z. On le note $\arg(z)$. Il est défini, par :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}; \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul Les égalités suivantes ont lieu à $2k\pi$ près (avec $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'); \quad \arg(z^n) = n. \arg(z) \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z); \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

2 Applications

2.1 Généralités

Définitions

Une application f de E dans F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F, et son graphe Γ.

Γ est une partie de $E \times F$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe un seul couple $(x, y) \in \Gamma$. L'élément y est l'image de x par f. On note $f(x)$.

L'application f se note:

$$E \xrightarrow{f} F ou f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.

L'application identique de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E.

Restriction, prolongement

Soit f une fonction de A dans F, et g une fonction de B dans F.

Si $A \subset B$ et si, pour tout x de A, on a $f(x) = g(x)$, on dit que f est une restriction de g, ou que g est un prolongement de f.

Composition des applications

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G.

La composée de f et de g est l'application de E dans G définie par :

$$x \mapsto g(f(x))$$

On la note $g \circ f$. La composition des applications est associative.

2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit f une application de E dans F.

Applications injectives

f est dite injective (ou est une injection) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f\left(x'\right)$$

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f\left(x'\right) \Longrightarrow x = x'$$

Applications surjectives

f est dite surjective (ou est une surjection) si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E, soit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Applications bijectives

f est dite bijective (ou est une bijection) si elle à la fois injective et surjective. Dans ce cas, tout élément y de F est l'image d'un, et un seul, élément x de E. A tout y de F, on associe ainsi un x unique dans E noté $f^{-1}(y)$ .f^{-1} est la bijection réciproque de f. On a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

ce qui entraîne

$$f \circ f^{-1} = Id_E \quad et \quad f^{-1} \circ f = Id_E$$

Théorème

Soit f une application de E dans F, et g une application de F dans G. On a les implications qui suivent :

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Images directe et réciproque

Définitions

Soit f une applaction de E dans F.

Si $A \subset E$, o, appelle image de A par f, la partie de F constituée par les images des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x)\,; x \in A\}$$

Si $B \subset F$, on appelle image réciproque de B, la partie de E constituée par les x dont l'image est dans B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

Théorème

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)\,; \quad B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\,; \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,; \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

3 Relations

3.1 Relation binaire

Choisir une partie Γ de $E \times E$, c'est définir une relation binaire $\Re$ sur E. Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x et y sont en relation, et on note $x\Re y$.

Une relation binaire $\Re$, définie sur un ensemble E, est :

– **Réflexive** si elle vérifie

$$\forall x \in E \qquad x\Re x$$

– **Symétrique** si

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\Re x \Longrightarrow y\Re x$$

– **Antisymétrique** si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad (x\Re y \quad \text{et} \quad y\Re x) \Longrightarrow x = y$$

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad (x\Re y \quad \text{et} \quad x \neq y) \Longrightarrow non \;\; y\Re x$$

– **Transitive** si elle vérifie

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad \forall z \in E \quad (x\Re y \quad \text{et} \quad y\Re z) \Longrightarrow \; x\Re z$$

3.2 Relation d'ordre

Définitions

Une relation binaire $\Re$, définie sur un ensemble E, est une relation d'ordre si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive. Notons la $<$.

Une relation d'ordre $<$ dans E est dite relation d'ordre total si deux éléments quelconques x et y de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x < y$ ou $y < x$.

Dans le cas contraire, l'ordre est partiel.

CHAPITRE 3

SUITES NUMÉRIQUES

1 Généralités

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1.1 Suite bornée

1. Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel A tel que, pour tout n, $u_n \leq A$. On dit que A est un majorant de la suite.
2. Une suite(u_n) est minorée s'il existe un réel B tel que, pour tout n, $B \leq u_n$. On dit que B est minorant de la suite.
3. Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe M tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n.

1.2 Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \qquad |u_n - 1| \leq \varepsilon$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente. Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

Toute suite convergente est bornée. Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

1.3 Limites infinies

On dit que la suite (u_n) tend vers

$$+\infty \quad \text{si} : \forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$$

$$-\infty \text{ si } : \forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq -A$$

1.4 Limites connues

Pour $k > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k^n}{n!} = 0; \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0; \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

2 Opérations sur les suites

2.1 Opérations algébriques

Si (u_n) et (v_n) convergent vers l et l', alors les suites $(u_n + v_n), (\lambda.u_n)$ et $(u_n.v_n)$ convergent respectivement vers $l + l', \lambda.l$ et $l.l'$.

si $l' \neq 0, \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

Si (u_n) tend vers 0 et si (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

2.2 Relation d'ordre

Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que l'on ait $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$ alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

2.3 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (x_n) est convergente vers l.

3 Suites monotones

3.1 Définition

LA suite (u_n) est :

1. **Croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n;
2. **Décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n;
3. **Stationnaire** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n;

3.2 Convergence

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergnete.

si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

4 Suites particulières

4.1 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + 1$$

Terme général :

$$u_n = u_0 + n.r$$

Somme des n premiers termes

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n.\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

4.2 Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométriques de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q.u_n$$

Terme général

$$u_n = u_0.q^n$$

Somme des n premiers termes

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= u_0.\frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{si} \quad q \neq 1 \\ &= n.u_0 \qquad \text{si} \quad q = 1 \end{aligned}$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

4.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

Limite éventuelle

Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

Cas f croissante

Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) eest monotone.

Cas f décroissante

Si f est décroissante sur I, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.

CHAPITRE 4

SÉRIES NUMÉRIQUES

1 Séries à termes réels

1.1 Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite (S_n)est convergente vers S. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Dans le cas d'une série convergente, on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On dit que S est la somme de la série, que S_n est la somme partielle d'ordre n et que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S = S_n + R_n$ et il est équivalent de dire que la série $\sum u_n$ converge ou que $\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n = 0$.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le terme général u_n tend vers 0.

1.3 Espace vectoriel des séries convergentes

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et ont pour sommes respectives U et V alors, pour tous nombres a et b, la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente et a pour somme $aU + bV$.

1.4 Critère de Cauchy

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) est de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n \right| < \varepsilon$$

2 Séries à termes positifs

2.1 Caractérisation

Pour qu'une série de termes réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.

2.2 Comparaison de deux séries

Théorème de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Utilisation d'équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes > 0 telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.

Règle de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Si $n^\alpha u_n$ est majoré avec $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $n^\alpha u_n$ est minoré par $A > 0$ avec $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.

Si $l < 1$, la série converge ; si $l > 1$, la série diverge.

2.3 Convergence absolue

définition et théorème

Définition

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

Théorème

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente et sa somme vérifie :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite semi-convergente.

2.4 Séries de référence

Séries géométriques

La série de terme général $u_n = aq^n$ est convergente (absolument) si, et seulement si, $|q| < 1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a\frac{1}{1-q}$$

Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

En particulier, la série divergente$\sum \frac{1}{n}$ est appelé *série harmonique.*

Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

2.5 Série alternées

Définition

Une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si son terme général change de signe alternativement.

En supposant $u_0 \geq 0$, on a donc $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = |u_n|$.

Critère spécial des séries alternées

Théorème

Si la suite de termes positifs (a_n) est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ est convergente.

Majoration du reste

Dans les hypothèses du critère spécial des séries alternées, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$est vérifie :

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$

CHAPITRE 5

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

1 Polynômes

1.1 Polynômes à une indéterminée

Définitions

Un polynôme à une indéterminée, à coefficients dans un corps $\Bbbk$, est une suite de valeurs a_i de $\Bbbk$, nulle à partir d'un certain rang p. Un tel polynôme se note P, ou $P(X)$:

$$P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$$

Les nombres a_i sont les coefficients du polynôme P.

Si $P \neq 0$, le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$ est le degré du polynôme P. On le note $\deg P$.

a_p est le coeffiecient dominant de P. Lorsque $a_p = 1$, le polynôme est dit unitaire, ou normalisé.

Pour le polynôme nul $P = 0$, on convient de poser $\deg P = -\infty$.

L'ensemble des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\Bbbk$, se note $\Bbbk[X]$.

On note $\Bbbk^n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1.2 Structure algébrique

Soit

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

et

$$Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

deux éléments de $\Bbbk[X]$, et $\lambda \in \Bbbk$.

1. **Addition de deux polynômes**

$$P + Q = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k$$

avec

$$r = \max(m, n) \quad \text{et} \quad c_k = a_k + b_k$$

On a :

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Si $\deg P \neq \deg Q$, il y a égalité.

2. **Produit par un scalaire**

$$\lambda P = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$$

Si $\lambda \neq 0$, on a : $\deg(\lambda P) = \deg P$.

3. **Produit de deux polynômes**

$$PQ = \sum_{k=0}^{m+n} d_k X^k \quad \text{avec} \quad d_k = \sum_{i+j=k} a_i . b_j$$

On a : $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Pour les trois lois précédentes, $\mathbb{k}[X]$ est une algèbre sur $\mathbb{k}$.

Les seuls éléments inversibles sont les polynômes constants non nuls.

$\mathbb{k}_n[X]$est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{k}[X]$, de dimension $n+1$.

4. **Composé de deux polynômes**

Le polynôme composé de P et Q est :

$$P \circ Q = \sum_{i=0}^{n} a_i Q^i$$

On a $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$.

On écrit souvent $P(Q)$ au lieu de $P \circ Q$.

1.3 Fonctions polynomiales

$P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ étant un polynôme de $\mathbb{k}[X]$, la fonction polynomiale associée à P est l'application $\widetilde{P}$, de $\mathbb{k}$ dans $\mathbb{k}$, définie par :

$$x \mapsto \widetilde{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

1.4 Divisibilité

Si $A = BQ$ (avec $Q \in \mathbb{k}[X]$), on dit que A est un multiple de B, ou que B est un diviseur de A.

On dit que A et B sont des polynômes associées lorsque $A = \lambda B$, avec $\lambda \in \mathbb{k}^*$.

1.5 Division euclidienne

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{k}[X]$, avec $B \neq 0$. Il existe des polynômes uniques Q et R dans $\mathbb{k}[X]$, tels que :

$$A = B.Q \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B$$

On dit que Q est le quotient, et R le reste, dans la division euclidienne de A par B.

1.6 Polynôme dérivé

La définition et les propriétés du polynôme dérivé sont analogues à celles de la fonction associée.

2 Fractions rationnelles

2.1 Décomposition en éléments simples

Définitions

De façon analogue à un nombre rationnel quotient de deux entiers, on définit une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ à partir des polynômes A et $B \neq 0$.

On appelle degré de la fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$, le nombre $\deg A - \deg B$. On le note $\deg F$.

$F = \frac{A}{B}$ étant une fraction retionnelle simplifiée, la fonction rationnelle associée à F est la fonction $\widetilde{F}$, de $\mathbb{k}$ dans $\mathbb{k}$, définie par :

$$x \mapsto \widetilde{F}(x) = \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)} \quad \text{quand} \quad \widetilde{B}(x) \neq 0$$

$\widetilde{F}$ n'est pas définie pour les zeros de B. Ce sont les pôles de F.

Forme générale de la décomposition

Une fraction rationnelle, de forme irréductible $F = \frac{A}{B}$ (c'est-à-dire A et B premiers entre eux), s'écrit de façon unique, sous la forme :

$$F = E + \frac{R}{B} \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B$$

E est la partie entière, et $\frac{R}{B}$ la partie fractionnelle de F.

Partie polaire quand $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

Si la facorisation de b en polynômes irréductibles comporte une terme $(X-a)^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle partie polaire de F relative à ce terme une somme d'éléments simples du type :

$$\frac{\alpha_k}{(X-a)^k} + \frac{\alpha_{k-1}}{(X-a)^{k-1}} + ... + \frac{\alpha_1}{X-a}$$

Pour une fraction F donnée, les complexes α_i existent et sont uniques.

Théorème de décomposition

Toute fraction rationnelle, écrite sous forme irréductible, est égale, de façon unique, à la somme de sa partie entière et des parties polaires relatives à chacun des facteurs irréductibles intervenant dans la décomposition de B.

2.2 Méthodes pratiques de décomposition

Plan d'étude

1. On met F sous forme irréductible en simplifiant par le PGCD du numérateur et du dénominateur.
2. On obtient E et R à l'aide de la division euclidienne de A par B.
3. On foactorise B en polynômes irréductibles.
4. On écrit la forme littérale de la décomposition en éléments simples de F, ou de $\frac{R}{B}$.
5. On détermine les coefficients à l'aide de diverses méthodes.

Détermination des coefficients

- La méthode la plus rudimentaire consiste à réduire au même dénominateur la forme décomposée, et à identifier les numérateurs.

- Vous pouvez remplacer X par des valeurs numériques, différentes des pôles.
- Sachant que la décomposition est unique, si F est paire, ou impaire, on obtient des relations entre les coefficients.
- En utilisant la fraction sans partie entière, $\lim\limits_{n\to\infty} xF(x)$ donne une relation entre coefficients.
- En multipliant F par $(X-a)^k$ et en remplaçant X par a, on obtient α_k.
- Si a est un pôle simple, la parie polaire associée $\frac{\alpha}{X-a}$ vérife :

$$\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}$$

- Soit P un polynôme dont les racines sont $a_1, ..., a_k$, d'ordre de multicité respectifs $m_1, ..., m_k$. On a
$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X-a_i}$$

CHAPITRE 6

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1 Définitions

1.1 Fonction numérique

Définir une fonction numérique f sur une partie non vide E de $\mathbb{R}$, c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel y à tout x de E.

Le réel y est l'image de x par f et s'écrit $f(x)$. On note :

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f. Il est noté D_f, ou D s'il n'y a pas d'ambiguité.

1.2 Représentation graphique

Le plan étant rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, la représentation graphique de f est l'ensemble C_f des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

1.3 Images et images réciproques d'ensembles

Soit $A \subset D_f$. L'image de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x)\,; x \in A\}$$

Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f; f(x) \in B\}$$

2 Premières propriétés

2.1 Parité

– f est paire si

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \qquad \text{et} \qquad f(-x) = f(x)$$

son graphe est symétrique par rapport à (Oy).

– f est impaire si

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \qquad \text{et} \qquad f(-x) = -f(x)$$

son graphe est symétrique par rapport à O.

2.2 Périodicité

f est périodique, de période T (ou T-périodique), si

$$\forall x \in D_f \qquad (x+T) \in D_f \qquad \text{et} \qquad f(x+T) = f(x)$$

son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Sens de variation

1. f est croissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \qquad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. f est décroissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \qquad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

3. f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I.

4. Avec les inégalités strictes, on définit : f strctement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur D_f.

2.4 Extremum

– f admet un maximum (resp. minimum) global en x_0 si :

$$\forall x \in D_f \qquad f(x) \leq f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)\,)$$

– f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$, tel que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \leq f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)\,)$$

Un maximum ou un minimum local est dit extremum local en x_0.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

3 Relation d'ordre

3.1 Comparaison de fonctions

f et g étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition D, on note $f \leq g$ (resp.$f \geq g$) si :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geq g(x))$$

Si $f \geq 0$, $f$est dite ppositive.

3.2 Majorant, minorant

Si l'ensemble des images $f(D)$ est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que f est majorée, ou minoréeé, ou bornée.

Si l'image $f(I)$ de I admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de borne supérieure, de borne inférieure, de f sur I et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) \, ; \inf_{x \in I} f(x)$$

3.3 Propriétés

$$\inf_{x \in I} f(x) = -\sup_{x \in I} (-f(x))$$

Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$.

Si $I \subset J$, on a $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} f(x)$.

4 Opérations sur les fonctions

4.1 Valeur absolue d'une fonction

f étant définie sur D, la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \longmapsto |f(x)|$.

On définie aussi f^+ et f^- sur D par :

$$f^+(x) = \sup(f(x), 0) ; f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$$

On a alors

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

4.2 Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions numériques et λun réel.
La fonction λfest définie sur D_f par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

La fonction $f + g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La fonction fg est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(fg)(x) = f(x) g(x)$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap D_g \setminus \{x; g(x) = 0\}$ par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4.3 Composition

On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $D_f \cap f^{-1}(D_g)$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

5 Limites

Soit f une fonction, à valeur réelles, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points.

5.1 Limite d'une fonction en x_0

Soit x_0 un point appartenant à I, ou extrémité de I. On dit que f admet une limite finie l en x_0, et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Si une fonction admet une limite l en x_0, cette limite est unique.

5.2 Limite à gauche, limite à droite

1. f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0. On note : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = l$.
2. f admet une limite à gauche l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]-\infty, x_0[$ admet pour limite l en x_0. On note : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = l$.
3. Si f est définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - a, x_0 + a[$, sauf en x_0, alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Si f est définie en x_0, ces deux limites doivent aussi être égales à $f(x_0)$.

5.3 Limite infinie en x_0

– On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A$$

On note : : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq -A$$

On note : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

5.4 Limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

- On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l$.
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A$$

On note : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

6 Propriétés des limites

6.1 Propriétés liées à l'ordre

- Si f admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.
- Si f admet une limite finie $l > 0$ en x_0, alors il existe $a > 0$ tel que $f \geq a$ au voisinage de x_0.
- Si f est positive au voisinage de x_0 et admet une limite finie l en x_0, alors $l \geq 0$.
- Si $f \geq g$ au voisinage de x_0, et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = m$, alors $l \leq m$.

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0, et vérifiant $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0.

Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) en x_0, alors g a pour limite l en $x_{0.}$

- Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, et vérifiant $f \leq g$ au voisinage de x_0.
  Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$
  Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$

6.2 Fonction composée

- Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = u_0$ et g définie au vooisinage de u_0 telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow u_0} g(u) = v$.
  Alors $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(f(x)) = v$.

7 Continuité

7.1 Continuité en un point

- f est continue en x_0 si elle est définie en $x_0$et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$(resp. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$).
- **Prolongement par continuité**
  Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\widetilde{f}(x_0) = l$ et $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$, est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

7.2 Continuité sur un intervalle

- Soit E un ensemble qui soit un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une fonction f, définie sur E, est dite continue sur E, si f est continue en tout point de E.
- L'ensemble $C(I)$ des fonctions continues sur I constitue une algèbre, c'est-à-dire que, si f et g sont des éléments de $C(I)$ et λ un réel, les fonctions $f+g$, fg, et λf appartiennent à $C(I)$, et les opérations ainsi définies possèdent toutes les propriétés algébriques qui caractérisent la structure que l'on appelle une algèbre.

7.3 Image d'un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Image d'un intervalle fermé

Si f est continue sur un intervalle fermé I, alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a,b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Cas d'une fonction strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I.

f esr une bijection de I sur $f(I)$, et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

8 Fonctions dérivables

8.1 Définitions

Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

On dit alors que f est dérivable en x_0.

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, f est dite dérivable à droite en x_0, et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0, et noté $f'_d(x_0)$.

On définit de même la dérivée à gauche en x_0, notée $f'_g(x_0)$.

f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f admet en x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

Fonction dérivée

f est dite dérivable sur E, si elle dérivable en tout point de E.

On appelle fonction dérivée de f sur E, la fonction, notée f', définie sur E par :

$$x \longmapsto f'(x)$$

Dérivées successives

Soit f dérivable sur E. Si f' est dérivable sur E, on note sa fonction dérivée f'' ou $f^{(2)}$. On appelle dérivée seconde de f.

Pour n entier, on définit par récurrence la dérivée $n - ième$, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$, puis $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$, lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.

$f$est dite de classe C^n sur E si $f^{(n)}$ existe sur E, et est continue sur E.

f est dite de classe C^∞, ou indéfiniment dérivable, si f admet des dérivées de tous ordres.

Interprétation graphique

f dérivable en x_0 signife que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0, mais le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à Oy.

Dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

8.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Opérations algébriques

Si f et g sont dérivables en x_0, il en est de même de $f+g$, $f.g$ et de $\frac{f}{g}$ si $g(x) \neq 0$; et on a :

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\
(f.g)'(x_0) &= f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

Fonction composée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I.On suppose que f est dérivable en $f\left(x_0\right)$ et que $f'\left(x_0\right) \neq 0$.

Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f\left(x_0\right)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(x_0\right)\right) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$